

Masterarbeit

Sven Koch

Automatische Kalibrierung von Ankerpositionen zur
hochgenauen Positionsbestimmung mit Ultra-wideband

Sven Koch

Automatische Kalibrierung von Ankerpositionen zur hochgenauen Positionsbestimmung mit Ultra-wideband

Masterarbeit eingereicht im Rahmen der Masterprüfung
im Studiengang *Master of Science Informatik*
am Department Informatik
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Betreuender Prüfer: Prof. Dr. Stephan Pareigis
Zweitgutachter: Prof. Dr. Tim Tiedemann

Eingereicht am: 29. Oktober 2025

Sven Koch

Thema der Arbeit

Automatische Kalibrierung von Ankerpositionen zur hochgenauen Positionsbestimmung mit Ultra-wideband

Stichworte

Automatische Ankerkalibrierung, Positionsbestimmung, Ultra-wideband, Probabilistische Zustandsschätzung, Particle-Filter, Fisher-Information

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur automatischen Kalibrierung von Ankerpositionen in Ultra-wideband Positionierungssystemen vorgestellt. Der auf einem Particle-Filter basierende Ansatz schätzt simultan Tag- und Ankerpositionen und ist robust gegenüber Messunsicherheiten sowie dynamischen Änderungen des Systems. Experimente bestätigen eine schnelle und zuverlässige Selbstkalibrierung mit Genauigkeiten von unter 15 cm.

Sven Koch

Title of Thesis

Automatic Calibration of Anchor Positions for High-accuracy Positioning with Ultra-wideband

Keywords

Anchor Self-localization, Localization, Ultra-wideband, Probabilistic State Estimation, Particle Filter, Fisher Information

Abstract

This thesis presents a method for automatic calibration of anchor positions in ultra-wideband positioning systems. The particle filter-based approach simultaneously estimates tag and anchor positions while remaining robust against measurement uncertainties and dynamic system changes. Experimental results confirm fast and reliable self-calibration with accuracies of less than 15 cm.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vi
Tabellenverzeichnis	viii
Abkürzungen	ix
1 Einleitung	1
1.1 Ziele	2
1.2 Forschungsstand	3
1.3 Vorgehensweise	5
1.4 Struktur	5
2 Ultra-wideband Positionsbestimmung	7
2.1 Technologische Grundlagen	7
2.2 Architektur von UWB-Positionierungssystemen	9
2.2.1 Anker-basierte vs. Anker-freie Systeme	10
2.2.2 UWB-Beacon	11
2.3 Positionsbestimmung mit Ultra-wideband	14
2.3.1 Time of Arrival	14
2.3.2 Double-Sided Two-Way Ranging	15
2.3.3 Trilateration	16
3 Probabilistische Zustandsschätzung	18
3.1 Bayes-Filter	18
3.1.1 Algorithmus	20
3.1.2 Grenzen des Bayes-Filters	22
3.2 Particle-Filter	22
3.2.1 Algorithmus	23

4	Automatische Kalibrierung von UWB-Ankerpositionen	27
4.1	Problemstellung	28
4.2	Filterdesign	29
4.2.1	Initialisierung	30
4.2.2	Aktualisierung des Filters	33
4.2.3	Ausrichtung der Partikelmenge	37
4.3	Transformation in ein globales Koordinatensystem	40
4.4	Fisher-Information	42
5	Experimente und Ergebnisse	45
5.1	Aufbau der Testumgebung	46
5.1.1	ArUco-Tracking	46
5.2	Experimente	48
5.2.1	Allgemeine Auswertung der automatischen Ankerkalibrierung . . .	48
5.2.2	Auswirkungen von späteren Änderungen der Ankerpositionen . . .	56
5.2.3	Einfluss der Trajektorie auf die Konvergenzgeschwindigkeit	60
5.2.4	Einfluss der Ankerpositionen auf die Konvergenzgeschwindigkeit . .	64
5.2.5	Optimierung der Initialisierung mithilfe der Fisher-Information . .	67
6	Fazit	70
6.1	Ausblick	72
	Literaturverzeichnis	73
	A Anhang	78
	Glossar	79
	Selbstständigkeitserklärung	82

Abbildungsverzeichnis

2.1	Frequenzverteilung verschiedener Drahtlossysteme	9
2.2	Gehäuse und Leiterplatte des eigenentwickelten UWB-Beacons	12
2.3	Schematische Darstellung des Double-Sided Two-Way Ranging mit drei Nachrichten zwischen zwei Knoten	15
2.4	Geometrische Darstellung der Trilateration im zweidimensionalen Raum .	17
3.1	Schematischer Ablauf des Bayes-Filters	21
3.2	Schematischer Ablauf des Particle-Filters	25
4.1	Funktionsprinzip des Low-Variance-Resampling Algorithmus	36
4.2	Beispielhafte Darstellungen isometrischer Transformationen derselben Par- tikelmengen	38
5.1	Versuchsaufbau des UWB-Positionierungssystems in einer Dreifeldsport- halle	47
5.2	<i>LEGO® MINDSTORMS®</i> Roboter mit UWB-Tag und ArUco-Marker . .	47
5.3	Ferngesteuertes Modellauto mit UWB-Tag und ArUco-Marker	47
5.4	Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Expe- riment 5.2.1	49
5.5	Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands während der Initialisierungsphase im Experiment 5.2.1	51
5.6	Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands nach Kon- vergenz der automatischen Ankerkalibrierung im Experiment 5.2.1	51
5.7	Zeitlicher Verlauf der internen Fehlermetrik e_t des Particle-Filters im Ex- periment 5.2.1	52
5.8	Zeitlicher Verlauf der Abweichung zwischen der vom ArUco-Tracking ge- messenen und der vom Particle-Filter geschätzten Tagposition im Experi- ment 5.2.1	53

5.9	Kumulative Häufigkeitsverteilung der Positionsfehler zwischen ArUco-Tracking und Particle-Filter Schätzung im Experiment 5.2.1	54
5.10	Zusammenhang zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Fehler des Particle-Filters über 100 Simulationsdurchläufe im Experiment 5.2.1	55
5.11	Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Experiment 5.2.2	57
5.12	Zeitlicher Verlauf der internen Fehlermetrik e_t des Particle-Filters im Experiment 5.2.2	58
5.13	Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands nach der Manipulation einer Ankerposition im Experiment 5.2.2	59
5.14	Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands nach neuer Kalibrierung der Ankerpositionen im Experiment 5.2.2	59
5.15	Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Experiment 5.2.3	61
5.16	Zusammenhang zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Fehler des Particle-Filters über 100 Simulationsdurchläufe im Experiment 5.2.3	63
5.17	Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Experiment 5.2.4	65
5.18	Zusammenhang zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Fehler des Particle-Filters über 100 Simulationsdurchläufe im Experiment 5.2.4	66
5.19	Farbkodierte Karten zur Darstellung der räumlichen Verteilung der Fisher-Information im Experiment 5.2.5	69

Tabellenverzeichnis

5.1	Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.1	55
5.2	Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.2	60
5.3	Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.3	62
5.4	Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.4	66

Abkürzungen

AoA Angle of Arrival.

CEP Circular Error Probable.

DOP Dilution of Precision.

DS-TWR Double-Sided Two-Way Ranging.

DUKF Derivative Unscented Kalman-Filter.

ESKF Error-State Kalman-Filter.

ETSI European Telecommunications Standards Institute.

FCC Federal Communications Commission.

GNSS Global Navigation Satellite System.

GPS Global Positioning System.

IEEE Institute of Electrical and Electronics Engineers.

IMU Inertial Measurement Unit.

MDS Multidimensionale Skalierung.

NLOS Non-Line-of-Sight.

PCS Personal Communication System.

RL Reinforcement Learning.

RTT Round Trip Time.

SLAM Simultaneous Localization and Mapping.

TDoA Time Difference of Arrival.

ToA Time of Arrival.

UART Universal Asynchronous Receiver Transmitter.

UWB Ultra-wideband.

1 Einleitung

Die Ultra-wideband (UWB) Technologie hat sich in den letzten Jahren als leistungsfähige Methode etabliert, um in spezialisierten Anwendungen hochgenaue Positionsbestimmungen mit geringen Latenzzeiten und niedrigem Energieverbrauch zu ermöglichen [37, 1, 42]. Typische Einsatzgebiete liegen vor allem im Indoor-Bereich bzw. in Umgebungen, in denen die sonst klassischerweise zur Lokalisierung eingesetzten globalen Navigationssatellitensysteme (GNSS) nicht zur Verfügung stehen [1, 28]. In diesen Bereichen ersetzen UWB-Positionierungssysteme bisherige Alternativen, die auf schmalbandigen Funksignalen wie z. B. RFID, Wi-Fi oder Bluetooth basieren. Diese Technologien sind im Vergleich zu Ultra-wideband weniger genau und weniger zuverlässig, weshalb ihre Eignung für präzise Lokalisierungsaufgaben begrenzt ist [1]. Im Gegensatz dazu erreicht Ultra-wideband in der Positionsbestimmung Genauigkeiten von ± 10 cm oder besser und eignet sich somit auch für komplexe und anspruchsvolle Anwendungen [42].

Besonders in Einsatzszenarien wie der Robotik, Logistik und Indoor-Navigation sind derart hohe Genauigkeiten erforderlich, um z. B. eine zuverlässige Steuerung, Positionsüberwachung oder Kollisionsvermeidung zu gewährleisten. Diese Anwendungen erfordern häufig Positionsfehler von unter 30 cm [19].

Ermöglicht wird der Einsatz von UWB-Systemen durch die Verwendung eigener Referenzknoten, die zuvor in der jeweiligen Umgebung installiert werden [31]. Eine besondere Herausforderung bei der Installation besteht darin, dass die Referenzknoten mit hoher Präzision positioniert werden müssen, da die Kenntnis ihrer exakten Lage die Gesamtgenauigkeit der späteren Positionsbestimmung maßgeblich beeinflusst. Die Einrichtung ist folglich oft ein mühsamer, zeitaufwendiger und fehleranfälliger Prozess, insbesondere wenn große Flächen abgedeckt oder eine größere Anzahl von Referenzknoten installiert werden soll [28]. Die Ausstattung eines bestimmten Bereichs (z. B. eines Fabrikgebäudes, eines Einkaufszentrums oder eines gesamten urbanen Quartiers) erfordert schnell Dutzende bis Hunderte von Referenzknoten. In der Praxis erfolgt die Bestimmung ihrer Positionen meist mit speziellen Hilfsmitteln wie z. B. Lasermessgeräten oder GNSS-

Unterstützung [5, 30]. Dennoch bleibt der Prozess aufwendig und anfällig für Fehler. Selbst bei sorgfältiger Durchführung können ungenaue Messungen, fehlerhafte Geräteeinstellungen oder menschliche Faktoren zu Ungenauigkeiten führen, die sich nicht vollständig ausschließen lassen.

Mit der zunehmenden Verbreitung von UWB-Positionierungssystemen stellt sich daher verstärkt die Frage, wie der Einrichtungsprozess effizienter und zuverlässiger gestaltet werden kann – insbesondere bei großflächigen Systemen. Eine schnelle und präzise Einrichtung der Infrastruktur ist ein entscheidender Faktor, um die Akzeptanz der Ultra-wideband Technologie weiter zu fördern und gleichzeitig die Betriebskosten gering zu halten [28].

1.1 Ziele

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein Verfahren zur automatischen Kalibrierung von Ankerpositionen in UWB-Positionierungssystemen entwickelt werden. Mithilfe dieses Verfahrens kann die bislang aufwendige und fehleranfällige manuelle Vermessung der Referenzknoten vollständig automatisiert werden. Dies ermöglicht neben einer deutlichen Zeit- und Kostenersparnis auch eine höhere Robustheit und Flexibilität des Positionierungssystems. Darüber hinaus ist mit dem vorgeschlagenen Ansatz auch in Szenarien mit dynamisch veränderlichen Ankerpositionen eine kontinuierliche Selbstkalibrierung möglich. Auf diese Weise bleibt das UWB-Positionierungssystem trotz variabler Umgebungen dauerhaft funktionsfähig.

Eine besondere Motivation dieser Arbeit liegt darin, die Nutzbarkeit des an der HAW Hamburg verfügbaren UWB-Positionierungssystems zu steigern. Durch die vorgestellte Methode soll dessen zukünftiger Einsatz in Forschungsprojekten erheblich vereinfacht werden. Ein Beispiel hierfür ist die Forschung und Entwicklung zur urbanen Quartiersmobilität, insbesondere mit dem Projekt *SafeWalker* [14], das die sichere Führung mobilitätseingeschränkter Personen ermöglichen soll. In einem Pilotversuch sollen dafür der Hamburger Lohmühlenpark bzw. der Campus der HAW Hamburg am Berliner Tor mit einem UWB-Positionierungssystem ausgestattet werden, um in dem GNSS-eingeschränkten Urban Canyon eine zuverlässige Lokalisierung zu gewährleisten [22]. Darüber hinaus ergeben sich Anwendungsmöglichkeiten in weiteren Forschungsprojekten der HAW Hamburg, etwa im *SmartRecycling* [16] oder im Bereich der Miniatur-

Autonomie [15], wo Konzepte zur autonomen Steuerung von Fahrzeugen oder Schiffen anhand von Modellen entwickelt werden.

1.2 Forschungsstand

Das Problem der Positionsbestimmung von Knoten in drahtlosen Netzwerken wird bereits seit den Anfängen der drahtlosen Sensornetzwerke intensiv erforscht. Ein frühes Beispiel hierfür ist die Arbeit von Doherty et al. (2001) [8]. Seither beschäftigen sich zahlreiche Forschungsarbeiten mit der Entwicklung von Lösungsansätzen zur Reduzierung des manuellen Kalibrierungsaufwands, zur Erhöhung der Genauigkeit sowie zur Verbesserung der Robustheit solcher Systeme.

Einen Ansatz zur Korrektur der Genauigkeit fehlerbehafteter Ankerpositionen beschreiben Qi et al. (2023) [30]. Das Modell der Autoren berücksichtigt Unsicherheiten in vorab nur grob bekannten Ankerkoordinaten und behebt diese durch eine enge Kopplung von Messdaten eines UWB-Systems und einer Inertial Measurement Unit (IMU). Zur Sensordatenfusion und Zustandsschätzung wird ein Derivative Unscented Kalman-Filter (DUKF) eingesetzt. Die Experimente zeigen, dass mit dieser Methode eine präzise Optimierung der Ankerpositionen erreicht werden kann, wobei die mittlere Fehlerabweichung bei etwa 6 cm liegt.

Weiterführend untersuchen Corbalán et al. (2023) [5] ein Verfahren, das die Ankerpositionen komplett eigenständig bestimmen kann. Hierbei werden UWB-Entfernungsmessungen zwischen benachbarten Ankern ausgewertet, um deren räumliche Lage mithilfe der aus der multivariaten Statistik bekannten Methode der Multidimensionalen Skalierung (MDS) zu rekonstruieren. Dieses Verfahren setzt zusätzlich voraus, dass das UWB-System nicht nur Distanzen zwischen Tag und Ankern, sondern auch zwischen den Ankern selbst erfassen kann. In realen Experimenten, die in einer komplexen und anspruchsvollen Umgebung durchgeführt wurden, konnte eine durchschnittliche Genauigkeit von unter 50 cm bei der Bestimmung der Ankerpositionen gemessen werden.

Eine methodisch ähnliche Lösung schlagen Yasukawa et al. (2020) [40] vor. Im Gegensatz zur Multidimensionalen Skalierung werden die Positionen benachbarter Anker hier geometrisch durch Trilateration bzw. Multilateration bestimmt. Das zugrunde liegende Gleichungssystem kann unter Verwendung der Cayley-Menger-Determinante in geschlossener Form und mit geringem Rechenaufwand gelöst werden. Die Autoren erreichen einen

Fehler der automatischen Ankerkalibrierung von unter 10 cm, wobei die Experimente in einer weniger komplexen Umgebung durchgeführt wurden.

Shi et al. (2019) [32] präsentieren einen durch Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) inspirierten Ansatz. Im Unterschied zum klassischen SLAM-Verfahren, bei dem eine vollständige Karte der Umgebung erstellt wird, werden hier die Positionen der UWB-Anker gemeinsam mit der Position des mobilen Tags geschätzt. Die Methode nutzt sowohl UWB-Entfernungsmessungen als auch die Messwerte einer Inertial Measurement Unit, die mithilfe eines Error-State Kalman-Filters (ESKF) zu einer gemeinsamen Zustandsschätzung fusioniert werden. Die Ankerpositionen werden sukzessive bestimmt, während sich der zu lokalisierende Tag durch die Umgebung bewegt. Direkte Distanzmessungen zwischen den einzelnen Ankern sind dabei nicht erforderlich. Gleichzeitig liefert das Kalman-Filter eine kontinuierlich optimierte Positionsschätzung des UWB-Tags. In Simulationen konnte eine Genauigkeit im Bereich von etwa 10 cm erzielt werden.

Eine vergleichbare Idee verfolgen Wendeberg et al. (2012) [39] mit einem Verfahren, das ursprünglich zur Selbstkalibrierung der Empfängerpositionen in einem Ultraschall-Positionierungssystem entwickelt wurde. Dazu definieren die Autoren ein probabilistisches Modell, das, realisiert durch ein Particle-Filter, die gleichzeitige Lokalisierung einer bewegten Ultraschall-Signalquelle sowie die Kalibrierung der Empfängerpositionen ermöglicht. Nach einer Initialisierungsphase, in der die Signalquelle die Umgebung exploriert, konvergiert das System sukzessive zu einer zuverlässigen Schätzung der Empfängerpositionen. Das probabilistische Sensormodell berücksichtigt explizit Messunsicherheiten und modelliert zusätzlich Fehler, die z. B. durch Ausreißer in den Distanzmessungen verursacht werden können. Die hohe Robustheit zeigt sich in den Experimenten, in denen Positionsfehler von unter 5 cm erreicht werden konnten. Der Ansatz kommt ohne zusätzliche Sensorik, wie etwa IMU-Daten oder weitere externe Informationen, aus und lässt sich konzeptionell ebenfalls auf UWB-basierte Positionierungssysteme übertragen.

Die vorgestellten Arbeiten zeigen unterschiedliche Strategien zur automatischen oder teilautomatischen Kalibrierung von Ankerpositionen in drahtlosen Positionierungssystemen. Für die in dieser Arbeit verfolgten Ziele sind insbesondere die Lösungsansätze von Shi et al. [32] und Wendeberg et al. [39] relevant. Beide Methoden beruhen ausschließlich auf Entfernungsmessungen zwischen Tag und Ankern und erfordern keine spezifischen Anpassungen am UWB-System. Die probabilistische Zustandsschätzung von Anker- und Tagpositionen ermöglicht dabei eine hohe Präzision und ist unempfindlich gegenüber Messrauschen und Ausreißern.

1.3 Vorgehensweise

Ausgangspunkt und methodische Grundlage dieser Masterarbeit bildet die Forschung von Wendeborg et al. [39]. Unter Anwendung der theoretischen Grundlagen zur UWB-Positionsbestimmung und probabilistischen Zustandsschätzung wird dieser Ansatz erweitert und für den Einsatz mit einem modernen UWB-Positionierungssystem adaptiert.

Das entwickelte Verfahren zur automatischen Kalibrierung der Ankerpositionen wird anschließend experimentell mit einem realen UWB-Lokalisationssystem erprobt. Die Untersuchungen konzentrieren sich dabei speziell auf das Verhalten des Particle-Filters, insbesondere in Bezug auf Genauigkeit, Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit.

1.4 Struktur

Die vorliegende Arbeit ist in sechs Kapitel gegliedert, die schrittweise von den theoretischen Grundlagen über die methodische Umsetzung bis zur Evaluation des entwickelten Verfahrens führen:

Kapitel 1 beinhaltet die Einleitung mit einer Übersicht über Motivation, Zielsetzung und Aufbau der Arbeit sowie eine Einordnung in den aktuellen Stand der Forschung.

Kapitel 2 behandelt die Grundlagen der UWB-basierten Positionsbestimmung. Es werden die technischen Prinzipien von Ultra-wideband erläutert und deren Einsatzmöglichkeiten zur präzisen Lokalisierung dargestellt.

Kapitel 3 führt in die probabilistische Zustandsschätzung ein. Aufbauend auf dem Satz von Bayes werden rekursive Filterverfahren beschrieben, insbesondere das Particle-Filter, das zur Schätzung von Zuständen in dynamischen Systemen eingesetzt wird.

Kapitel 4 verknüpft die zuvor eingeführten Konzepte und stellt ein Verfahren zur automatischen Kalibrierung von UWB-Ankerpositionen mithilfe eines Particle-Filters vor. Die Funktionsweise sowie Herausforderungen und Überlegungen zum Filterdesign werden detailliert erläutert.

Kapitel 5 beschreibt die experimentelle Evaluation des entwickelten Verfahrens. Es werden der Versuchsaufbau und die Durchführung der Experimente vorgestellt sowie eine ausführliche Auswertung und Interpretation der Ergebnisse vorgenommen.

Kapitel 6 schließt die Arbeit mit einem Fazit und Ausblick ab. Die zentralen Erkenntnisse werden zusammengefasst und mögliche Weiterentwicklungen sowie offene Fragestellungen für zukünftige Arbeiten aufgezeigt.

2 Ultra-wideband Positionsbestimmung

Ultra-wideband (UWB) ist eine vergleichsweise neue Funktechnologie, die sich in den letzten Jahren als grundlegender Standard für präzise Lokalisierungsaufgaben im Nahbereich etabliert hat [31, 37]. Insbesondere in komplexen Umgebungen wie in Innenräumen (Lagerhallen, Flughäfen, Einkaufszentren etc.) oder dicht bebauten Stadtgebieten, wo klassische satellitengestützte Navigationssysteme (GNSS) nicht zuverlässig verfügbar sind, bietet Ultra-wideband eine robuste Alternative [22]. Durch die Verwendung einer dedizierten lokalen Infrastruktur ermöglichen UWB-Systeme Positionsmessungen mit Genauigkeiten im Bereich weniger Zentimeter [1]. Diese Eigenschaft macht die Technologie für Anwendungen in der Robotik, Logistik, Industrieautomatisierung und zunehmend auch im Endverbraucherbereich interessant [37].

In diesem Kapitel werden die technologischen Grundlagen von Ultra-wideband erläutert und ein verbreiteter Ansatz zur Positionsbestimmung mithilfe von UWB-Messungen beschrieben. Als Plattform für die Tests und Experimente in dieser Masterarbeit wird ein eigenentwickeltes UWB-Positionierungssystem eingesetzt, das im Folgenden ebenfalls kurz charakterisiert wird.

2.1 Technologische Grundlagen

Mit dem Begriff *Ultra-wideband* wird eine Klasse von Funksignalen bezeichnet, deren Bandbreite deutlich größer ist als bei konventionellen Drahtlossystemen. Die Nutzung dieser breitbandigen Signale wurde erstmalig in den 2000er-Jahren von der US-amerikanischen Federal Communications Commission (FCC) sowie weiteren Regulierungsbehörden offiziell freigegeben. Laut Definition weist ein UWB-Signal entweder eine absolute Bandbreite von mindestens 500 MHz oder eine relative Bandbreite von mehr als 20 % auf [31].

Aus der hohen Bandbreite folgen ultrakurze Signalimpulse, die im Bereich von einer Nanosekunde liegen. Diese hohe zeitliche Auflösung ermöglicht sehr präzise räumliche Entfernungs- und Positionsmessungen mit einer Genauigkeit von wenigen Zentimetern. Die große Bandbreite sorgt zudem für eine Reihe zusätzlicher Vorteile [31, 41], die sich wie folgt zusammenfassen lassen:

- Infolge des breiten Frequenzspektrums, das auch niedrigere Frequenzanteile umfasst, können UWB-Signale leichter Hindernisse durchdringen.
- Ultra-wideband ist weniger anfällig für Multipath- bzw. Mehrwegeeffekte, da aufgrund der kurzen Impulse Signalreflexionen zeitlich aufgelöst und getrennt werden können. Dies verbessert die Zuverlässigkeit und Genauigkeit in komplexen Non-Line-of-Sight (NLOS) Umgebungen.
- Die Sendeleistung wird auf den gesamten Frequenzbereich verteilt. Daher besitzt ein UWB-Signal eine sehr geringe Sendeleistungsdichte, die unter dem Rauschpegel vieler herkömmlicher Drahtlossysteme liegt.
- Die Signalform ähnelt dem Grundrauschen. Zusammen mit der geringen Sendeleistung ist ein UWB-Signal nur schwer detektierbar, was die Abhörsicherheit erhöht.
- Die Datenkommunikation ist mit hohen Datenraten möglich.
- Die Energieaufnahme eines UWB-Transceivers ist gering.
- Die Kosten eines UWB-Transceivers sind niedrig.

Diese Eigenschaften machen Ultra-wideband für die Echtzeit-Positionsbestimmung deutlich präziser und zuverlässiger als andere Indoor- bzw. Nahbereichspositionierungssysteme, die beispielsweise auf RFID, Wi-Fi, Bluetooth, ZigBee oder optischen und akustischen Verfahren basieren [1]. Darüber hinaus kann Ultra-wideband auch allgemein zur drahtlosen Datenübertragung eingesetzt werden [31].

Ein UWB-Signal wird üblicherweise im Frequenzbereich von 3,1 GHz bis 10,6 GHz betrieben. Da die UWB-Signale einen sehr großen Teil des Frequenzspektrums beanspruchen, kommt es zwangsläufig zu Überlagerungen mit etablierten schmalbandigen Drahtlossystemen [31]. Ein Beispiel für die Frequenzverteilung verschiedener Drahtlossysteme ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Um sicherzustellen, dass die UWB-Signale keine Störungen in anderen, überlagerten Systemen verursachen, ist der Betrieb reguliert. Je nach Anwendungsgebiet und Einsatzort legen Regulierungsbehörden Einschränkungen bei der

maximalen Sendeleistung und dem zulässigen Sendezeitanteil fest. Die deutsche Bundesnetzagentur erlaubt für Ultra-wideband die höchste Sendeleistung von $-41,3 \text{ dBm MHz}^{-1}$ im Frequenzbereich von 6,0 GHz bis 8,5 GHz [4].

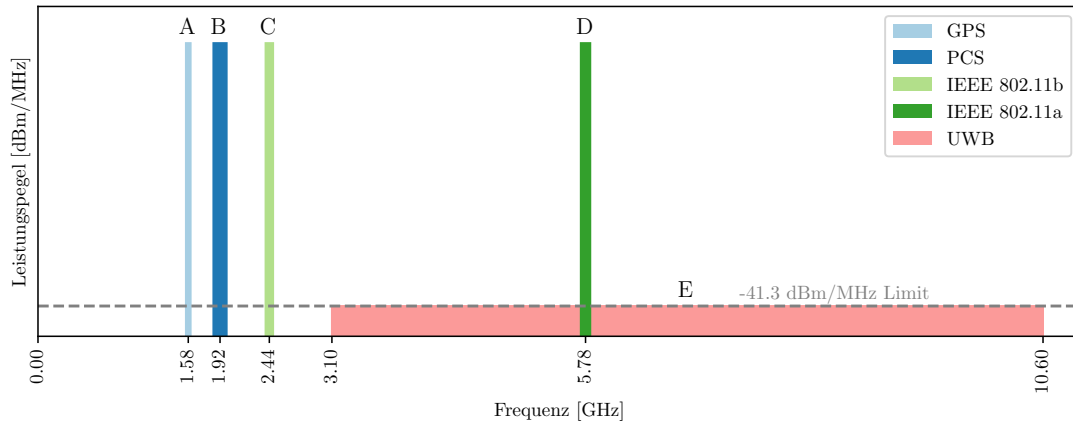


Abbildung 2.1: Frequenzverteilung verschiedener Drahtlossysteme. Die Leistungspegel der verschiedenen Systeme sind nicht maßstabsgetreu dargestellt. A: Global Positioning System (GPS) (1,56-1,61 GHz); B: Personal Communication System (PCS) (1,85-1,99 GHz); C: Mikrowellenherde, schnurlose Telefone, Bluetooth, Wi-Fi IEEE 802.11b (2,4-2,48 GHz); D: Wi-Fi IEEE 802.11a (5,725-5,825 GHz); E: Ultra-wideband (UWB) (3,1-10,6 GHz). In der Abbildung ist außerdem das $-41,3 \text{ dBm MHz}^{-1}$ Limit für die maximale Leistungsdichte von UWB-Signalen eingezeichnet.

Bildquelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an [31].

Für eine einheitliche und interoperable Nutzung UWB-basierter Applikationen arbeitet das European Telecommunications Standards Institute (ETSI) an der Entwicklung harmonisierter europäischer Normen [11], die technische Anforderungen, Frequenznutzungsbedingungen und Zulassungsrichtlinien vereinheitlichen sollen.

2.2 Architektur von UWB-Positionierungssystemen

Ein typisches UWB-Positionierungssystem besteht aus einem Netzwerk von mehreren Knoten, in dieser Arbeit auch *Beacons* genannt, die räumlich im Einsatzgebiet verteilt sind. Zwischen diesen Beacons findet eine kontinuierliche UWB-Kommunikation statt. Je

nach verwendetem Messprinzip werden entweder die Paketumlaufzeit oder der Zeitunterschied der eintreffenden Signale ausgewertet, um Entfernungen oder Winkel zwischen den einzelnen Beacons zu bestimmen [31]. Aus den so gewonnenen Messdaten lassen sich anschließend ihre Positionen im System berechnen.

2.2.1 Anker-basierte vs. Anker-freie Systeme

Die Architektur von UWB-Positionierungssystemen kann im Wesentlichen in die zwei Kategorien *Anker-basierte Systeme* und *Anker-freie Systeme* eingeteilt werden [24], die sich hinsichtlich des Aufbaus, des Kalibrierungsaufwands und der Flexibilität in der Anwendung unterscheiden.

Anker-basierte Systeme

Bei Anker-basierten Systemen sind mehrere ortsfeste Beacons, sogenannte *Anker*, im Raum installiert. Die genauen Positionen dieser Anker sind bekannt und werden in der Regel manuell eingemessen oder durch externe Systeme (z. B. GPS, Lasermessgeräte etc.) bestimmt. Diese Anker dienen als Referenzpunkte, mit deren Hilfe die Position mobiler Knoten, sogenannter *Tags*, durch Entfernungs- oder Zeitdifferenzmessungen berechnet wird [24].

Der wesentliche Vorteil Anker-basierter Systeme liegt in der vergleichsweise einfachen Form der Positionsbestimmung. Mit einem Trilaterationsalgorithmus kann die gesuchte Position des Tags direkt aus den bekannten Ankerpositionen und den gemessenen Entfernungen zwischen Tag und Ankern ermittelt werden. Die so bestimmte Position liegt dabei unmittelbar im globalen Koordinatensystem der Anker vor und lässt sich somit leicht in bestehende Anwendungen oder Karten integrieren. Ist eine präzise Einmessung und stabile Installation der Anker gewährleistet, ermöglicht diese Architektur eine sehr genaue Positionsbestimmung. Ein damit verbundener Nachteil ist jedoch, dass die Positionen sämtlicher Referenzpunkte vorab exakt bestimmt werden müssen. Dies ist insbesondere in großen oder komplexen Umgebungen mit vielen Ankern aufwendig und teils kaum praktikabel [24]. Zudem müssen die Anker nach dem Einmessen unbedingt stationär bleiben und dürfen nachträglich nicht umplatziert werden. Wie die Untersuchungen im Hauptprojekt [23] gezeigt haben, steht die Genauigkeit der Referenzpositionen in direktem Zusammenhang mit der Zuverlässigkeit des gesamten Positionierungssystems.

Anker-freie Systeme

Im Gegensatz dazu benötigen Anker-freie Systeme keine Beacons mit vorab bekannten Positionen. Stattdessen werden die Positionen aller Knoten relativ zueinander bestimmt, ohne Bezug zu einem absoluten Koordinatensystem [24]. Diese relative Positionierung ist in Anwendungen ausreichend, bei denen lediglich die Lagebeziehungen zwischen den Knoten relevant sind.

In diesen Anker-freien Systemen liegt der Vorteil in der Flexibilität, da keine exakte Vorvermessung der Ankerpositionen erforderlich ist. Allerdings schränkt das Fehlen eines globalen Koordinatensystems die Anwendbarkeit ein, sobald absolute Positionsangaben benötigt werden [24]. Zudem ist die Berechnung der Positionen ohne feste Referenzpunkte mathematisch und algorithmisch komplexer.

In dieser Masterarbeit wird ein automatisches Kalibrierungsverfahren entwickelt, das die Eigenschaften beider Architekturen kombiniert. Die Grundlage bildet ein Aufbau mit mehreren ortsfesten Ankern als Referenzpunkten, der einem Anker-basierten System ähnelt. Im Unterschied dazu müssen die Positionen dieser Anker jedoch nicht im Vorfeld bekannt sein. Stattdessen werden sie, vergleichbar mit Anker-freien Systemen, automatisch kalibriert. Dieser hybride Ansatz verbindet die Flexibilität Anker-freier Architekturen mit den Vorteilen fester Referenzpunkte und vermeidet zugleich das aufwendige manuelle Einmessen der Ankerpositionen.

2.2.2 UWB-Beacon

Die zentrale Komponente jedes UWB-Beacons ist ein spezieller UWB-Transceiver, der das Senden und Empfangen der UWB-Signale ermöglicht. Ergänzt wird dieser in der Regel durch einen Mikrocontroller, welcher Aufgaben wie Kommunikation, Signalverarbeitung und die Datenaufbereitung übernimmt.

Für die experimentellen Untersuchungen in dieser Arbeit kommt ein eigens entwickelter UWB-Beacon zum Einsatz. Sowohl die Hard- als auch Softwarekomponenten wurden vollständig an der HAW Hamburg konzipiert. Das ursprüngliche Design entstand im Rahmen von zwei Bachelorarbeiten [20, 21] und wurde anschließend unter Mitwirkung von Herrn Markus Kasten weiterentwickelt und optimiert. Die Abbildung 2.2 zeigt das Gehäuse sowie die Leiterplatte des entwickelten Beacons. Im Folgenden werden die wichtigsten Komponenten und technischen Merkmale vorgestellt.

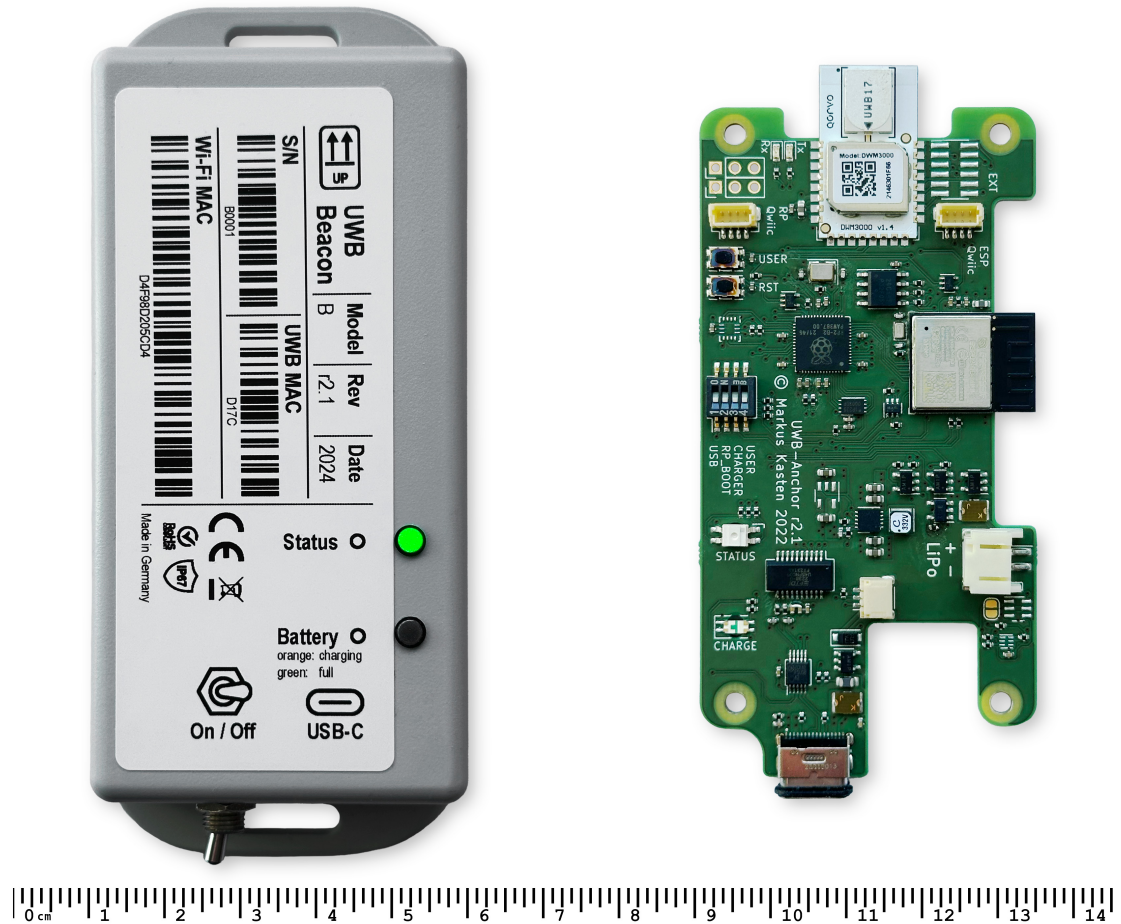


Abbildung 2.2: Gehäuse und Leiterplatte des eigenentwickelten UWB-Beacons. Auf der linken Seite ist das wetterfeste IP67-Gehäuse in Originalgröße mit Typenschild dargestellt. Rechts befindet sich die Leiterplatte, auf der die zentralen Komponenten des Systems angeordnet sind. Dazu zählen der *Qorvo DWM3000* UWB-Transceiver für die Entfernungsbestimmung, der *RP2040* Mikrocontroller zur Signalverarbeitung sowie der *ESP32-C3* für die externe Kommunikation über Wi-Fi oder UART.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

Qorvo DWM3000 Der *Qorvo DWM3000* UWB-Transceiver ist das Kernbauteil für die UWB-Kommunikation. Das Modul stellt einen vollständig IEEE 802.15.4-2011 kompatiblen Ultra-wideband Sender/Empfänger dar und ermöglicht Echtzeit-Entfernungsmessungen anhand von Paketumlaufzeiten oder Zeitdifferenzen. Laut Herstellerangaben [7] wird eine Genauigkeit von ± 10 cm erreicht, die durch geeignete Filterverfahren weiter verbessert werden kann.

RP2040 Der *RP2040* ist ein 32-Bit Dual-Core Mikrocontroller der *Raspberry Pi Foundation* mit 133 MHz, 264 kB Arbeitsspeicher und 16 Mbit Flash-Speicher. Der Mikrocontroller koordiniert im Wesentlichen die UWB-Kommunikation und berechnet die Entfernungen aus den UWB-Laufzeiten. Die entsprechende Firmware ist in der Programmiersprache C implementiert.

ESP32-C3 Der *ESP32-C3* ist ein Mikrocontroller des Herstellers *Espressif*, der neben einem RISC-V-Kern insbesondere über integrierte Wi-Fi Konnektivität verfügt. Der Mikrocontroller steuert die externe Schnittstelle und Kommunikation, sodass die Messdaten wahlweise seriell über eine UART-Schnittstelle oder drahtlos via Wi-Fi bereitgestellt werden können. Die Firmware ist in der Programmiersprache Rust realisiert.

Zur weiteren Ausstattung gehören eine USB-C Schnittstelle zur Datenkommunikation, Programmierung und zum Aufladen des integrierten 2000 mA h Akkus, ein wetterfestes Gehäuse nach IP67-Standard sowie zwei *Qi*-Anschlüsse, über die Zusatzsensoren wie z. B. GNSS-Module oder Inertial Measurement Units (IMUs) integriert werden können. Insbesondere Inertial Measurement Units werden häufig in Kombination mit Positionierungssystemen eingesetzt. Diese Sensoren erfassen die translatorischen Bewegungen und die Drehraten eines Objekts in den sechs kinematischen Freiheitsgraden. Basierend auf diesen Messdaten können Positions-, Geschwindigkeits- und Lageinformationen abgeleitet werden [33]. Die Integration beider Systeme ermöglicht mithilfe der Inertialmesswerte eine Positionsschätzung mit einer höheren Aktualisierungsrate oder eine Überbrückung bei kurzen Ausfällen des primären Positionierungssystems.

Der UWB-Beacon kann sowohl als UWB-Anker als auch als UWB-Tag eingesetzt werden. Die Funktionsweise wird durch die entsprechende Softwarekonfiguration bestimmt.

Die Kommunikation des UWB-Lokalisationssystems erfolgt auf UWB-Kanal 5 mit einer Mittenfrequenz von 6489,6 MHz und einer Bandbreite von 499,2 MHz. Die Datenrate beträgt $6,8 \text{ Mbit s}^{-1}$. Der UWB-Tag bestimmt mit einer Aktualisierungsrate von 40 Hz

seine Entfernung zu den verfügbaren Ankern, sodass z. B. in einem Aufbau mit acht Ankern insgesamt 320 Entfernungsbestimmungen pro Sekunde erfolgen. In praktischen Tests wurde eine maximale Reichweite von über 50 m zwischen Sender und Empfänger erzielt.

2.3 Positionsbestimmung mit Ultra-wideband

Ein UWB-Positionierungssystem basiert zunächst auf der präzisen Messung von Zeitinformationen. Abhängig vom verwendeten Messverfahren lassen sich aus diesen Zeitinformationen Entfernungen oder Winkel ableiten, die anschließend zur Bestimmung der Position genutzt werden. Typische Verfahren sind Time of Arrival (ToA), Time Difference of Arrival (TDoA) oder Angle of Arrival (AoA). In Kombination mit geometrischen Verfahren wie Trilateration, Triangulation oder Hyperbelnavigation kann daraus die exakte Position des zu lokalisierenden Knotens bestimmt werden [31, 41]. Nachfolgend wird dazu ein einfaches, in der Praxis verbreitetes Vorgehen vorgestellt, das auch in dieser Arbeit Anwendung findet.

2.3.1 Time of Arrival

Time of Arrival (ToA) bezeichnet ein Verfahren, bei dem die Entfernung zwischen zwei Knoten durch die Messung der Signallaufzeit zwischen Sender und Empfänger bestimmt wird. Um die Signallaufzeit zu ermitteln, werden die Zeitstempel des Nachrichtenversands und -empfangs verglichen. Dazu müssen beide Knoten entweder über synchronisierte Uhren verfügen oder die Zeitinformationen müssen während der Kommunikation ausgetauscht werden [31].

Die Distanz s zwischen zwei Knoten ergibt sich als Produkt aus der Lichtgeschwindigkeit c und der gemessenen Signallaufzeit t_{prop} :

$$s = c \cdot t_{\text{prop}} \quad (2.1)$$

Für den Austausch der nötigen Zeitstempelinformationen und zur Bestimmung von t_{prop} wird üblicherweise das Verfahren Double-Sided Two-Way Ranging (DS-TWR) eingesetzt.

2.3.2 Double-Sided Two-Way Ranging

Mit dem Double-Sided Two-Way Ranging (DS-TWR) wird die Signallaufzeit einer Nachricht von einem sendenden Knoten zu einem empfangenden Knoten gemessen. Bei dem Verfahren ist keine Synchronisation zwischen den Uhren der Kommunikationspartner erforderlich. Die Laufzeit wird stattdessen aus den Zeitstempeln mehrerer Nachrichtenübertragungen ermittelt [31, 7].

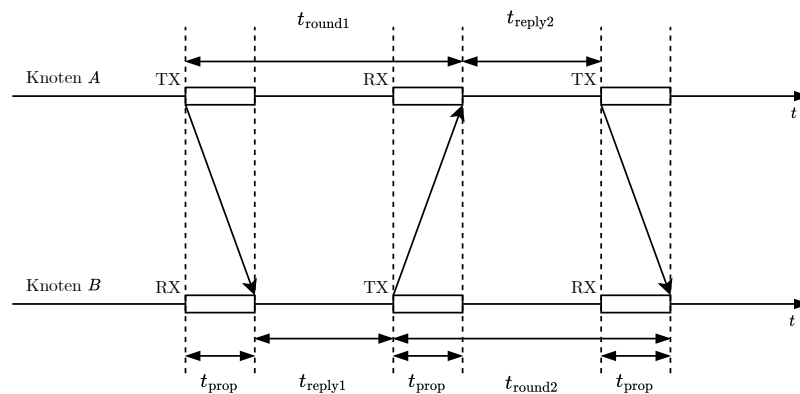


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung des Double-Sided Two-Way Ranging mit drei Nachrichten zwischen zwei Knoten. Zunächst sendet Knoten A eine Startnachricht an Knoten B, woraufhin Knoten B eine Antwort zurückschickt und gleichzeitig eine zweite Messung einleitet. Die zweite Messung wird durch eine abschließende Nachricht von Knoten A beendet. Beide Knoten erfassen dabei jeweils die genauen Sende- und Empfangszeitstempel, sodass die Zeitmessungen aus beiden Richtungen kombiniert werden können. Somit lässt sich die Signallaufzeit robust messen, ohne dass eine vorherige Uhrensynchronisation erforderlich ist.

Bildquelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an [7].

Die Funktionsweise von Double-Sided Two-Way Ranging ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Zunächst initiiert Knoten A den Messvorgang, woraufhin Knoten B antwortet. Gleichzeitig startet Knoten B eine zweite Messung, die mit einer abschließenden Nachricht von Knoten A beendet wird. Beide Knoten erfassen dabei jeweils die exakten Sende- und Empfangszeitstempel, sodass die Zeiten t_{round1} und t_{reply1} für den ersten sowie t_{round2} und t_{reply2} für den zweiten Messdurchgang bestimmt werden können. Die daraus resultierende

ungefähre Signallaufzeit \hat{t}_{prop} kann folgendermaßen berechnet werden [7]:

$$\hat{t}_{\text{prop}} = \frac{t_{\text{round1}} \cdot t_{\text{round2}} - t_{\text{reply1}} \cdot t_{\text{reply2}}}{t_{\text{round1}} + t_{\text{round2}} + t_{\text{reply1}} + t_{\text{reply2}}} \quad (2.2)$$

Da die Antwortzeiten t_{reply1} und t_{reply2} sowohl von Knoten A als auch von Knoten B erfasst werden, können systematische Fehler, beispielsweise aufgrund von Frequenzinstabilitäten der beteiligten Oszillatoren, kompensiert werden. Trotz einer typischen Abweichung der Oszillatoren von 20 ppm liegt der dadurch verursachte Fehler im Bereich weniger Pikosekunden [7]. Auf diese Weise liefert das Verfahren eine robuste Messung der tatsächlichen Signallaufzeit.

2.3.3 Trilateration

Sobald das UWB-Positionierungssystem über Entfernungsmessungen zu mehreren ortsfesten Ankern mit bekannten Koordinaten verfügt, kann durch Trilateration die gesuchte Position des Tags berechnet werden.

Als Trilateration wird eine geometrische Methode zur Bestimmung der Position eines Punktes im Raum bezeichnet. Die Trilateration nutzt dabei die Eigenschaft, dass ein Punkt mit bekannter Entfernung zu einem Referenzpunkt auf einer Kreisbahn (bzw. auf einer Kugelschale) um diese Referenz liegt, wobei der Radius der Entfernung entspricht. Mithilfe mehrerer Referenzpunkte kann die gesuchte Position eindeutig bestimmt werden [31]. Im zweidimensionalen Raum sind dazu Entfernungsmessungen zu mindestens drei bekannten Punkten erforderlich. Im dreidimensionalen Raum erhöht sich die Anzahl auf mindestens vier nicht koplanare Referenzpunkte.

Mathematisch kann das Trilaterationsproblem als Gleichungssystem modelliert werden. Im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 sei $P(x, y)$ die gesuchte Position und $A_i(x_i, y_i)$ die bekannten Koordinaten der Referenzpunkte $i \in \{1, 2, 3\}$. Die Entfernungen d_i zwischen dem Punkt P und den Ankern A_i sind durch Messungen bekannt. Aus diesen Angaben lassen sich die folgenden drei Gleichungen ableiten [31]:

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ d_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ d_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \end{cases} \quad (2.3)$$

Eine beispielhafte geometrische Darstellung der Trilateration zeigt Abbildung 2.4. Die gesuchte Position P liegt im Schnittpunkt der Kreise um die Referenzpunkte A_i mit den Radien d_i . Folglich wird das Gleichungssystem (2.3) gelöst, indem für $P(x, y)$ eine Lösung gefunden wird, die für alle drei Gleichungen gleichermaßen gilt [31]. Da sich alle Kreise in einem Punkt schneiden, hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.

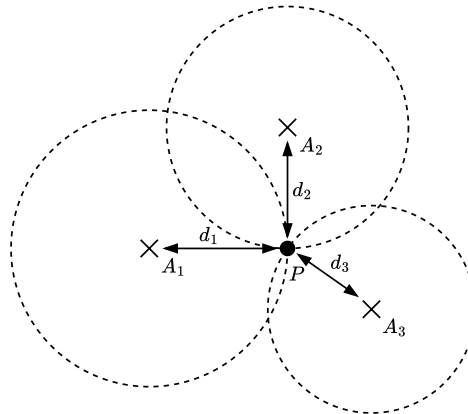


Abbildung 2.4: Geometrische Darstellung der Trilateration im zweidimensionalen Raum. Aus den gemessenen Distanzen d_1 , d_2 und d_3 ist der Ort von Punkt P eindeutig zu bestimmen. P liegt im Schnittpunkt der drei Kreise um die Ankerpunkte A_1 , A_2 und A_3 .

Bildquelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an [31].

In der Praxis ist es nahezu unmöglich, das Trilaterationsproblem anhand dieser geometrischen Modellierung zu lösen. Die exakte Lösung des Gleichungssystems setzt Positionsangaben und Entfernungsmessungen mit perfekter Genauigkeit voraus. Sobald sich die Kreise nicht in einem einzigen Punkt schneiden, hat das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung. Stattdessen kann die Trilateration als Optimierungsproblem betrachtet werden [29]. Anstatt den Schnittpunkt der Kreise direkt zu berechnen, wird ein Punkt X gesucht, der die beste Annäherung an die tatsächliche Position P liefert. Die Optimierung kann durch klassische Algorithmen zur Fehlerminimierung (z. B. Methode der kleinsten Quadrate) erfolgen oder, in komplexeren Szenarien, in ein probabilistisches Schätzverfahren integriert werden.

3 Probabilistische Zustandsschätzung

Die Schätzung von Zuständen in dynamischen Systemen auf der Grundlage unsicherer Sensorinformationen stellt eine zentrale Aufgabe in zahlreichen technischen Anwendungen dar. Beispiele hierfür finden sich in der mobilen Robotik, bei der autonomen Fahrzeugnavigation, in der Signalverarbeitung sowie auch in der Positionsbestimmung mittels Ultra-wideband [33, 36, 41]. Das Grundproblem besteht meist darin, dass der tatsächliche Systemzustand nicht direkt beobachtbar ist. Stattdessen stehen nur indirekte Messungen zur Verfügung, die zusätzlich durch Rauschen und Unsicherheiten behaftet sind [25]. Um diese Störungen systematisch zu behandeln, wird der Zustand unter Berücksichtigung der Steuer- bzw. Aktionssignale probabilistisch modelliert [36]. Ein geeigneter mathematischer Ansatz für diese Aufgabe ist das Bayes-Filter. Das Filter basiert auf den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und ermöglicht eine sequentielle, rekursive Aktualisierung des modellierten Systemzustands, sobald neue Messungen vorliegen.

In diesem Kapitel wird zunächst der Satz von Bayes als theoretische Grundlage vorgestellt. Darauf aufbauend wird die rekursive Formulierung des Bayes-Filters erläutert. Anschließend werden die Grenzen des klassischen Bayes-Filters aufgezeigt, um den Übergang zu praktischen Näherungsverfahren wie z. B. dem Particle-Filter vorzubereiten. Das Particle-Filter stellt im weiteren Verlauf dieser Arbeit den zentralen Ansatz für die automatische Kalibrierung der UWB-Ankerpositionen dar.

3.1 Bayes-Filter

Das Bayes-Filter basiert auf dem Satz von Bayes, der beschreibt, wie die Wahrscheinlichkeit eines Zustands x unter Berücksichtigung von neuen Informationen z aktualisiert werden kann [36]:

$$p(x \mid z) = \frac{p(z \mid x) \cdot p(x)}{p(z)} \quad (3.1)$$

Hierbei steht

- $p(x | z)$ für die bedingte *A-posteriori*-Wahrscheinlichkeit von x nach der Beobachtung von z ,
- $p(z | x)$ für die *Likelihood*, also der Wahrscheinlichkeit der Beobachtung von z im Zustand x ,
- $p(x)$ für die *A-priori*-Wahrscheinlichkeit des Zustands x und
- $p(z)$ für die *Evidenz*, also der Gesamtwahrscheinlichkeit für die Beobachtung z .

Der Satz von Bayes (3.1) ermöglicht es somit, das vorhandene Wissen über den Zustand eines Systems mit neuen Beobachtungen zu kombinieren und so eine aktualisierte Wahrscheinlichkeitsverteilung über den aktuellen Zustand zu erhalten [36].

In vielen realen Anwendungen verändert sich der Systemzustand über die Zeit. Daher wird dieser als zeitabhängige Zufallsvariable x_t modelliert [9], wobei der Index t den jeweils aktuellen Zeitschritt bezeichnet. Im Zeitverlauf werden mehrere Aktionen u ausgeführt, die das Systems beeinflussen. Zudem wird der Systemzustand durch Messungen z beobachtet. Mit den Mengen $u_{1:t} = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ sowie $z_{1:t} = \{z_1, z_2, \dots, z_t\}$ lassen sich sämtliche Aktionen und Beobachtungen bis zum Zeitpunkt t zusammenfassen [36]. Das Ziel der probabilistischen Zustandsschätzung ist es, für jeden Zeitpunkt t die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) \tag{3.2}$$

zu bestimmen. Diese Verteilung beschreibt das aktuelle Wissen über das System auf Basis aller bisherigen Messungen und ausgeführten Aktionen. In der Literatur wird diese Wahrscheinlichkeitsverteilung häufig als *belief* bezeichnet und als $\text{Bel}(x_t)$ notiert [36].

Die Berechnung von $\text{Bel}(x_t)$ ist im Allgemeinen nicht in geschlossener Form lösbar, da dabei der Zusammenhang zwischen allen vergangenen Zuständen, Aktionen und Messungen berücksichtigt werden müsste. Um die Komplexität zu reduzieren, wird die Markov-Annahme eingeführt. Diese besagt, dass der aktuelle Zustand x_t nur vom unmittelbar vorherigen Zustand x_{t-1} und der aktuellen Aktion u_t abhängt [36]:

$$p(x_t | x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t) \tag{3.3}$$

Damit entfällt die Abhängigkeit von weiter zurückliegenden Zuständen und Messungen.

Zusätzlich wird angenommen, dass der aktuelle Messwert z_t nur vom aktuellen Zustand x_t beeinflusst wird [36]:

$$p(z_t \mid x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t \mid x_t) \quad (3.4)$$

Diese beiden Annahmen führen zu einer erheblichen Vereinfachung und ermöglichen die rekursive Formulierung des Bayes-Filters.

3.1.1 Algorithmus

Mithilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit, der es erlaubt, die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den aktuellen Zustand x_t als Summe bzw. Integral über alle möglichen vorherigen Zustände zu schreiben, lässt sich das Modell in ein rekursives Verfahren überführen. Die beiden Schritte *Vorhersage* und *Korrektur* werden im Folgenden beschrieben, zudem der ist der Ablauf schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt.

Vorhersage

Im Vorhersageschritt wird das Wissen über den Systemzustand zeitlich fortgeschrieben, ohne dass bereits ein neuer Messwert berücksichtigt wird. Dazu wird die A-priori-Verteilung $\overline{\text{Bel}}(x_t)$ des aktuellen Zustands aus der A-posteriori-Verteilung des vorhergehenden Schrittes, der aktuellen Aktion u_t und dem Bewegungsmodell berechnet [9]:

$$\overline{\text{Bel}}(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t}) = \int p(x_t \mid x_{t-1}, u_t) \cdot \text{Bel}(x_{t-1}) dx_{t-1} \quad (3.5)$$

Das Bewegungsmodell $p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$ berücksichtigt dabei die Unsicherheit über die Übergangsdynamik des Systems. Es modelliert, wie sich der Zustand x_{t-1} unter der Wirkung der Aktion u_t auf x_t verändert [36].

Korrektur

Sobald die neue Messung z_t vorliegt, wird die Vorhersage entsprechend dem Satz von Bayes (3.1) aktualisiert [9]:

$$\text{Bel}(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t}) = \eta \cdot p(z_t \mid x_t) \cdot \overline{\text{Bel}}(x_t), \quad (3.6)$$

wobei $\eta = \frac{1}{p(z_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})}$ eine Normierungskonstante ist, die sicherstellt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle Zustände aufsummiert eins ergibt. Mit der Likelihood $p(z_t | x_t)$ wird bewertet, wie gut jeder mögliche Zustand mit der aktuellen Messung übereinstimmt [36].

Durch die schrittweise Anwendung dieses Filteralgorithmus entsteht eine Folge von Zustandsverteilungen, die den zeitlichen Verlauf des Systems beschreiben und jeweils alle bis dahin verfügbaren Informationen einbeziehen.

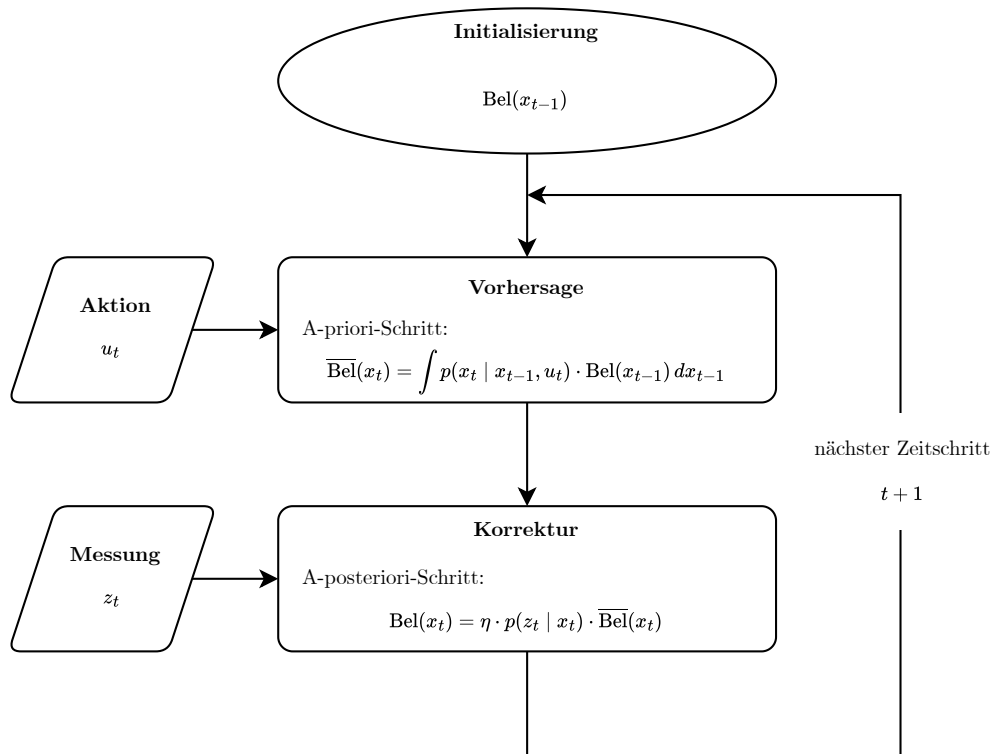


Abbildung 3.1: Schematischer Ablauf des Bayes-Filters. Im Vorhersageschritt wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Zustand mithilfe des Bewegungsmodells und der zuletzt bekannten Zustandsverteilung fortgeschrieben. Im anschließenden Korrekturschritt wird diese A-priori-Verteilung mit der aktuellen Messung kombiniert, sodass eine aktualisierte A-posteriori-Verteilung entsteht. Durch die wiederholte Ausführung dieser beiden Schritte ergibt sich ein rekursives Verfahren, das zu jedem Zeitpunkt eine konsistente Schätzung des Systemzustands liefert.

Bildquelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an [18].

3.1.2 Grenzen des Bayes-Filters

Das Bayes-Filter bietet einen allgemeinen theoretischen Rahmen für die probabilistische Zustandsschätzung, ist in den meisten praktischen Szenarien jedoch nicht direkt berechenbar [36]. Besonders die für die Aktualisierung erforderlichen Integrale sind in der Regel nicht analytisch lösbar. Nur unter der Annahme linearer Systemgleichungen und Gauß'scher Störgrößen lassen sich geschlossene Lösungen herleiten. In diesem Fall reduziert sich das Bayes-Filter auf das klassische Kalman-Filter [17]. In Szenarien mit stark nichtlinearen Modellen oder komplexen Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind hingegen numerische Näherungsverfahren erforderlich. Besonders verbreitet sind die sogenannten Particle-Filter, die das Bayes-Filter durch gewichtete Stichproben approximieren [34].

3.2 Particle-Filter

Das Particle-Filter stellt eine numerische Methode zur Näherung des Bayes-Filters dar. Der Algorithmus zählt zur Klasse der sequenziellen Monte-Carlo-Methoden und dient der posterioren Zustandsschätzung eines Systems [25]. Das Particle-Filter basiert auf der Idee, die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Systemzustands durch eine Menge

$$\mathcal{M}_t = \left\{ (x_t^{[k]}, w_t^{[k]}) \mid k = 1, \dots, K \right\} \quad (3.7)$$

von K diskreten Stichproben, den sogenannten Partikeln, zu repräsentieren. Jede Stichprobe stellt einen möglichen Systemzustand $x_t^{[k]}$ zum Zeitpunkt t dar. Dabei ist jedem Partikel ein Gewicht $w_t^{[k]}$ zugeordnet, das der relativen Wahrscheinlichkeit dieses Zustands bezogen auf alle bisherigen Messungen und Aktionen entspricht [34, 36]. Die Gesamtheit der Partikel bildet somit eine diskrete Approximation der posterioren Zustandsverteilung:

$$\text{Bel}(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^K w_t^{[i]} \cdot \delta(x_t - x_t^{[i]}), \quad (3.8)$$

wobei $\delta(\cdot)$ die Dirac-Deltafunktion bezeichnet [10].

Der wesentliche Vorteil eines Particle-Filters liegt in seiner Eigenschaft, beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu approximieren. Im Gegensatz zu anderen Verfahren (z. B.

dem Kalman-Filter) kann das Particle-Filter auch komplexe, nichtlineare und nicht-Gauß'sche Verteilungen abbilden, indem ausreichend viele Partikel erzeugt werden, die eine repräsentative Stichprobe des Zustandsraums darstellen [25].

Die Genauigkeit der Approximation hängt folglich von der Anzahl der Partikel ab. Um in höherdimensionalen Zustandsräumen eine ausreichende Abdeckung zu erreichen, ist eine große Partikelanzahl erforderlich. Dies führt teils zu erheblichen Rechenaufwänden [34], weshalb der Algorithmus erst mit dem Aufkommen effizienterer Mikroprozessoren eine breitere Anwendung finden konnte.

3.2.1 Algorithmus

Das Particle-Filter wird zum Startzeitpunkt $t = 1$ mit einer Partikelmenge \mathcal{M}_1 initialisiert. Dazu werden K Partikel aus einer bekannten oder geschätzten Anfangsverteilung $p(x_1)$ gezogen. Jedem Partikel wird zu Beginn das gleiche Gewicht

$$w_1^{[k]} = \frac{1}{K} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.9)$$

zugewiesen [25].

Im Anschluss folgt der Algorithmus dem bekannten rekursiven Aufbau des Bayes-Filters. Dabei wird ebenfalls die vorherige *belief* $\text{Bel}(x_{t-1})$ genutzt, um die aktuelle *belief* $\text{Bel}(x_t)$ zu bestimmen [36]. Neben den zwei grundlegenden Schritten *Vorhersage* und *Korrektur* beinhaltet das Particle-Filter zusätzlich den *Resampling*-Schritt, um einer Degeneration des Filters entgegenzuwirken [25]. Die einzelnen Schritte werden nachfolgend detaillierter beschrieben. Das Ablaufdiagramm in Abbildung 3.2 stellt den Filteralgorithmus zudem schematisch dar.

Vorhersage

Im Vorhersageschritt wird jeder Partikel entsprechend dem Bewegungsmodell zeitlich propagiert. Dieser Schritt entspricht dem A-priori-Update, da ein Nachfolgezustand noch ohne Kenntnis eines neuen Messwerts, sondern nur unter Berücksichtigung des Vorgängerzustands $x_{t-1}^{[k]}$ und der aktuellen Aktion u_t vorhergesagt wird [36]:

$$x_t^{[k]} \sim p(x_t^{[k]} \mid x_{t-1}^{[k]}, u_t) \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.10)$$

Das Bewegungsmodell $p(x_t^{[k]} | x_{t-1}^{[k]}, u_t)$ beschreibt dabei unter Einbeziehung von Unsicherheiten und Systemdynamiken, wie sich der Zustand $x_{t-1}^{[k]}$ unter Einwirkung der Aktion u_t auf den neuen Zustand $x_t^{[k]}$ ändert.

Korrektur

Der Korrekturschritt entspricht dem A-posteriori-Update und integriert eine neue Messung z_t in die Schätzung. Dazu wird unter Bezugnahme der A-priori-Vorhersage $x_t^{[k]}$ die Gewichtung jedes Partikels aktualisiert [36]:

$$\tilde{w}_t^{[k]} = w_{t-1}^{[k]} \cdot p(z_t | x_t^{[k]}) \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.11)$$

Das Sensormodell bzw. die Likelihood $p(z_t | x_t^{[k]})$ bewertet, wie gut der Partikelzustand mit der aktuellen Messung übereinstimmt und gewichtet dementsprechend die Relevanz des Partikels für die aktuelle Verteilung. Im Anschluss werden die Gewichte normalisiert, um eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erhalten [34]:

$$w_t^{[k]} = \frac{\tilde{w}_t^{[k]}}{\sum_{l=1}^K \tilde{w}_t^{[l]}} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3.12)$$

Resampling

Im Verlauf der Zeit kann es dazu kommen, dass nur wenige Partikel ein hohes Gewicht erhalten, während ein Großteil der Partikel gegenüber der gesamten Zustandsverteilung vernachlässigbar wird. Dieses Phänomen ist als Partikeldegeneration bekannt und verschlechtert die Approximation des Systemzustands [10]. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, wird ein Resampling durchgeführt, wenn die Metrik

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{l=1}^K (w^{[l]})^2} \quad (3.13)$$

unter einen bestimmten Schwellenwert $N_{\text{threshold}}$ fällt. Das Maß N_{eff} ist ein Näherungswert für die Anzahl der Partikel, die einen relevanten Beitrag zur Approximation der Wahrscheinlichkeitsverteilung leisten [25]. Ein Resampling-Algorithmus wählt eine Teilmenge der Partikel proportional zu ihren Gewichten aus und konzentriert diese wieder auf den relevanten Bereich der Zustandsverteilung [36]. Nach dem Resampling erhalten alle Partikel das einheitliche Gewicht $w_t^{[k]} = \frac{1}{K}$.

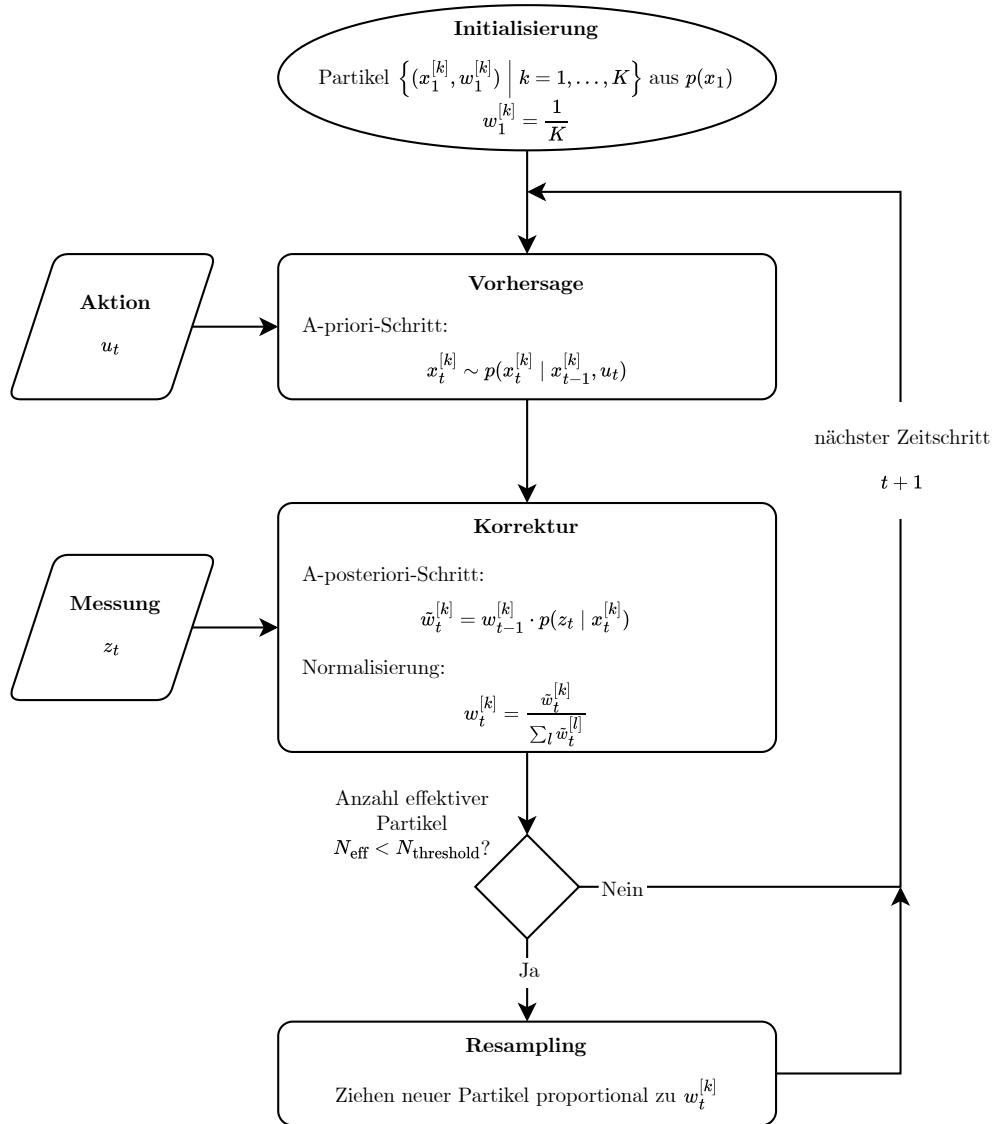


Abbildung 3.2: Schematischer Ablauf des Particle-Filters. Im Vorhersageschritt werden die Partikel gemäß dem Bewegungsmodell propagiert. Anschließend erfolgt im Korrekturschritt eine Gewichtung der Partikel basierend auf der Übereinstimmung mit der aktuellen Messung. Fällt die effektive Partikelanzahl N_{eff} unter einen Schwellenwert, wird ein Resampling durchgeführt, um die Partikel erneut auf die relevanten Bereiche der Zustandsverteilung zu konzentrieren. Durch die wiederholte Anwendung dieser Schritte entsteht eine rekursive Approximation der posterioren Wahrscheinlichkeitsverteilung, die eine kontinuierliche Zustandsschätzung ermöglicht.

Bildquelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an [18].

Durch die iterative Aktualisierung erzeugt das Particle-Filter eine Folge gewichteter Partikelmengen, die sukzessive die posterioren Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Systemzustands annähern. Dadurch wird eine kontinuierliche Zustandsschätzung ermöglicht, die sowohl die Modelleigenschaften (Bewegungs- und Sensormodell) als auch die Steueraktionen und Beobachtungen berücksichtigt [36].

Um den aktuell geschätzten Zustand aus der Partikelmenge mit normalisierten Gewichten zu berechnen, wird der gewichtete Mittelwert über alle Partikel gebildet [34]:

$$\hat{x}_t = \sum_{l=1}^K w_t^{[l]} x_t^{[l]} \quad (3.14)$$

Je nach Anwendung können auch andere Schätzwerte, wie etwa der gewichtete Median oder der Modus, verwendet werden.

4 Automatische Kalibrierung von UWB-Ankerpositionen

In diesem Kapitel wird die methodische Umsetzung des Ansatzes zur automatischen Kalibrierung von UWB-Ankerpositionen vorgestellt. Die Grundlage hierfür bildet ein probabilistischer Zustandsschätzer in Form eines Particle-Filters. Damit werden die zuvor erläuterten Konzepte zur Positionsbestimmung mit Ultra-wideband und zur Zustandsschätzung in dynamischen Systemen miteinander verknüpft.

Der vorgestellte Ansatz orientiert sich am Verfahren von Wendeberg et al. (2012) [39], das ursprünglich für ein Ultraschall-basiertes Indoor-Positionierungssystem entwickelt wurde. Dabei liegt eine vergleichbare Problemstellung vor. Zum einen sollen die Positionen ortsfester Anker bestimmt werden, während zum anderen die Trajektorie eines mobilen Tags geschätzt wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Ansatz auf ein UWB-basiertes Positionierungssystem übertragen und um mehrere Erweiterungen ergänzt.

Beim Entwurf des Particle-Filters für diesen Anwendungsfall ergeben sich zwei zentrale Herausforderungen:

1. Zu Beginn der Schätzung liegen keinerlei Informationen über die Positionen der UWB-Anker oder des UWB-Tags vor. Der Zustandsraum ist somit unendlich groß, was es herausfordernd macht, eine geeignete Initialisierung der Partikelmenge zu finden.
2. Die Messungen liefern ausschließlich relative Positionsinformationen. Es existiert kein Bezug zu einem globalen Koordinatensystem. Auch innerhalb eines Zeitschritts besteht zwischen den einzelnen Partikeln des Filters kein gemeinsamer Referenzpunkt, sodass sich die Partikel zwar in ihrer relativen Struktur ähneln, jedoch beliebig im Raum orientiert sein können.

Der Aufbau dieses Kapitels folgt im Wesentlichen den zuvor eingeführten Grundlagen zum Particle-Filter. Unter Berücksichtigung der beiden genannten Schwierigkeiten bei

der Initialisierung und Ausrichtung der Partikelmenge werden der Vorhersageschritt mit dem Bewegungsmodell, der Korrekturschritt mit dem Sensormodell sowie das Resampling als zentrale Bestandteile des Filterdesigns erläutert.

Zur weiteren Optimierung wird darüber hinaus die Fisher-Information als Maß für den Informationsgehalt der Messungen eingeführt. Damit lässt sich analysieren, welche möglichen Tagpositionen besonders informativ für die Kalibrierung der Ankerpositionen sind, um den Initialisierungsprozess gezielt zu beschleunigen.

4.1 Problemstellung

Betrachtet wird das Problem der gleichzeitigen Schätzung der kontinuierlichen Trajektorie eines UWB-Tags \mathbf{S}_t mit $t \in \{1, \dots, m\}$ sowie der ortsfesten Positionen von N UWB-Ankern \mathbf{A}_i mit $i \in \{1, \dots, N\}$ im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 [39].

Das UWB-System liefert in jedem diskreten Zeitschritt t Entfernungsmessungen $d_{i,t}$ zwischen dem Tag und den Ankern. Somit stehen für die Schätzung der Tag- und Ankerpositionen bis zum Zeitpunkt t die Messdaten $\mathbf{z}_{1:t} = \{\mathbf{z}_j \mid j = 1, \dots, t\}$ zur Verfügung. Da die Reichweite des UWB-Signals begrenzt ist und einzelne Messungen durch Störungen etc. ausfallen können, liegen nicht in jedem Zeitschritt Entfernungen zu allen Ankern vor. Die Messdaten \mathbf{z}_j stellen daher jeweils nur eine Teilmenge $\mathbf{z}_j \subseteq \{d_{i,j} \mid i = 1, \dots, N\}$ der potenziell möglichen Entfernungsmessungen dar [39].

Aus den Grundlagen zu Time of Arrival (vgl. Abschnitt 2.3.1) und der Trilateration (vgl. Abschnitt 2.3.3) ergibt sich der Zusammenhang

$$\|\mathbf{A}_{i,t} - \mathbf{S}_t\| = d_{i,t} \quad (4.1)$$

aus der gemessenen Entfernung $d_{i,t}$ und der euklidischen Distanz zwischen einer Ankerposition $\mathbf{A}_{i,t}$ und der Position des Tags \mathbf{S}_t . Da die Positionen der Anker unbekannt sind, bleiben die Koordinaten von $\mathbf{A}_{i,t}$ und \mathbf{S}_t relativ, d. h. es existiert kein Bezug zu absoluten Koordinaten oder einer Orientierung im globalen Raum.

Die Problemstellung ähnelt der in der Robotik bekannten Aufgabe des Simultaneous Localization and Mapping (SLAM). Hierbei wird eine unbekannte Umgebung kartiert, während gleichzeitig die eigene Position innerhalb dieser Karte bestimmt werden muss [33]. Allerdings ist in der vorliegenden Anwendung keine vollständige Karte der Umgebung

erforderlich. Stattdessen wird das Konzept übertragen und lediglich die Positionen der ortsfesten Ankerpunkte gesucht. Es handelt sich somit um eine reduzierte, auf das UWB-Positionierungssystem zugeschnittene Form des SLAM-Problems.

4.2 Filterdesign

Das zuvor formulierte Lokalisierungsproblem kann als rekursive probabilistische Zustandsschätzung betrachtet werden. Als theoretische Grundlage eignet sich hierfür das in den Gleichungen (3.5) und (3.6) beschriebene allgemeine Bayes-Filter, das eine fortlaufende Berechnung bzw. Aktualisierung des Systemzustands erlaubt und gleichzeitig robust gegenüber Bewegungs- und Messunsicherheiten ist.

Dazu wird der Systemzustand in jedem Zeitschritt t als

$$\mathbf{x}_t = \left[\mathbf{S}_t^\top, \mathbf{V}_t^\top, \mathbf{A}_{1,t}^\top, \dots, \mathbf{A}_{N,t}^\top \right]^\top \quad (4.2)$$

modelliert, wobei \mathbf{S}_t die Position und \mathbf{V}_t die Geschwindigkeit des zu lokalisierenden UWB-Tags beschreiben, während $\mathbf{A}_{i,t}$ die Standorte der UWB-Anker bezeichnet [39].

Zur Approximation der posterioren Zustandsverteilung $\text{Bel}(\mathbf{x}_t)$ wird ein Particle-Filter mit der Partikelmenge $\mathcal{M}_t = \left\{ (\mathbf{x}_t^{[k]}, w_t^{[k]}) \mid k = 1, \dots, K \right\}$ aus $K = 2000$ Partikeln genutzt. Jeder Partikel entspricht einem möglichen Systemzustand $\mathbf{x}_t^{[k]}$, der mit $w_t^{[k]}$ gewichtet ist [39]. Nach der Initialisierung wird das Particle-Filter gemäß dem in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Algorithmus rekursiv aktualisiert.

Die Initialisierung stellt in dieser Anwendung eine besondere Herausforderung dar. Da zu Beginn weder Informationen über die Positionen der Anker noch über die Position des Tags vorliegen, ist der Zustandsraum prinzipiell unendlich groß. Entsprechend ist es schwierig, eine Startverteilung der Partikel festzulegen, die sich in der Nähe des realen Systemzustands befindet. Das Particle-Filter steht dabei grundsätzlich vor dem Problem, dass eine ungünstig verteilte Partikelmenge, die entweder zu stark divergiert oder zu dicht konzentriert ist, in verschiedene Konfigurationen auseinanderdriften oder in einem einzelnen Punkt des Zustandsraums kollabieren kann [10]. Um dies zu vermeiden, wird die anfängliche Schätzung der Positionen durch ein klassisches Optimierungsverfahren bestimmt, das als Ausgangsbasis für die anschließende probabilistische Zustandsschätzung dient.

4.2.1 Initialisierung

Solange sich das Particle-Filter in der Initialisierungsphase befindet, wird versucht, den initialen Systemzustand mit einem nicht-probabilistischen Optimierungsverfahren zu bestimmen. In dieser Phase wird regelmäßig eine Teilmenge der Partikel entsprechend dem Ergebnis einer iterativen Minimierung aktualisiert [39]. Das Ziel ist es, den Fehler so zu reduzieren, dass der geometrische Zusammenhang zwischen Entfernungsmessungen, Tag- und Ankerpositionen aus Gleichung (4.1) bestmöglich erfüllt ist.

Hierzu werden $\tilde{m} < t$ Messungen einschließlich der letzten Messung \mathbf{z}_t ausgewählt, so dass die Teilmenge $\{\mathbf{z}_{I_1}, \dots, \mathbf{z}_{I_{\tilde{m}-1}}, \mathbf{z}_t\} \subseteq \mathbf{z}_{1:t}$ entsteht. Dabei bezeichnet I_j mit $j \in \{1, \dots, \tilde{m} - 1\}$ einen Zufallsindex aus den bisherigen Zeitschritten [39]. Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden nur j für die jeweilige Messung mit dem Index I_j verwendet. In dem hier entwickelten Verfahren wird $\tilde{m} = 10$ gewählt.

Die Idee, eine zufällige Auswahl vergangener Messungen in die Optimierung einzubeziehen, weist Parallelen zu Techniken aus dem Reinforcement Learning (RL) auf. Dort wird mit dem sogenannten *Replay Buffer* ein Speicher vergangener Erfahrungen genutzt, aus dem Stichproben gezogen werden, um den Trainingsprozess zu stabilisieren [2]. In ähnlicher Weise dient hier die zufällige Teilmenge historischer UWB-Messungen als Grundlage, um eine vielfältigere Datengrundlage in die Schätzung zu integrieren und diese dadurch weniger anfällig gegenüber einzelnen Ausreißern zu machen.

Gemäß den zuvor beschriebenen Überlegungen zur Bildung der Teilmenge aus $\mathbf{z}_{1:t}$ wird der zu optimierende Zustandsvektor als

$$\mathbf{v} = [\tilde{\mathbf{S}}_1^\top, \dots, \tilde{\mathbf{S}}_{\tilde{m}}^\top, \tilde{\mathbf{A}}_1^\top, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_N^\top]^\top \quad (4.3)$$

definiert, wobei sowohl die Tagpositionen aus den \tilde{m} Stichproben als auch die N Ankerpositionen berücksichtigt werden. Auf dieser Basis kann die vektorwertige Fehlerfunktion

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}) = [f_{1,1}(\mathbf{v}), f_{1,2}(\mathbf{v}), \dots, f_{N,\tilde{m}}(\mathbf{v})]^\top \quad (4.4)$$

formuliert werden [39], deren Komponenten

$$f_{i,j}(\mathbf{v}) = \left\| \tilde{\mathbf{A}}_i - \tilde{\mathbf{S}}_j \right\| - d_{i,j} \quad (4.5)$$

durch den Zusammenhang aus Gleichung (4.1) gegeben sind.

Gesucht wird die optimale Schätzung \mathbf{v}^* , die sich durch Minimierung der quadratischen Norm der Fehlerfunktion ergibt [39]:

$$\mathbf{v}^* = \arg \min_{\mathbf{v}} \frac{1}{2} \mathbf{b}(\mathbf{v})^\top \mathbf{b}(\mathbf{v}) \quad (4.6)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird hinzugefügt, um die spätere Ableitung der Zielfunktion zu vereinfachen und fällt bei der Bildung des Gradienten weg.

Zur numerischen Bestimmung von \mathbf{v}^* wird zunächst ein Gradientenabstiegsverfahren eingesetzt, gefolgt vom Newton-Verfahren, das in der Nähe des Minimums eine schnellere Konvergenz aufweist. Die iterative Suche startet mit einer zufälligen Anfangsschätzung $\mathbf{v}^{(0)}$ nahe null. Da weder Ankerpositionen noch andere Vorabinformationen bekannt sind, stellt dies eine geeignete Initialisierung dar [39].

Die Gradientenmethode minimiert die Zielfunktion $q(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{b}(\mathbf{v})^\top \mathbf{b}(\mathbf{v})$ durch die schrittweise Anpassung von \mathbf{v} in Richtung des negativen Gradienten. Unter Anwendung der Kettenregel kann der Gradient geschrieben werden als

$$\nabla q(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v})^\top \mathbf{b}(\mathbf{v}), \quad (4.7)$$

wobei $J(\mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}$ die Jacobi-Matrix der Fehlerfunktion $\mathbf{b}(\mathbf{v})$ bezeichnet [39, 35]. Das Verfahren bestimmt in jedem Iterationsschritt h basierend auf dem Gradienten einen Update-Vektor entsprechend des steilsten Abstiegs

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{Gradient}}^{(h)} = \gamma^{(h)} \nabla q(\mathbf{v}) = \gamma^{(h)} J(\mathbf{v}^{(h)})^\top \mathbf{b}(\mathbf{v}^{(h)}), \quad (4.8)$$

wobei $\gamma^{(h)} > 0$ die Schrittweite bzw. Lernrate darstellt [39]. Die Schrittweite steuert, wie stark die Anpassung im jeweiligen Iterationsschritt ausfällt. Die Schätzung des optimalen Zustandsvektors wird anschließend aktualisiert zu $\mathbf{v}^{(h+1)} = \mathbf{v}^{(h)} - \Delta \mathbf{v}_{\text{Gradient}}^{(h)}$.

Sobald sich die Schätzung $\mathbf{v}^{(h)}$ nach etwa $h = 300$ Iterationen dem Minimum nähert, wird der Übergang zum Newton- bzw. Quasi-Newton-Verfahren durchgeführt. Dieses Verfahren nutzt zusätzlich Informationen über die zweite Ableitung der Zielfunktion (Hesse-Matrix), um eine schnellere Konvergenz nahe dem Minimum zu ermöglichen. Der Update-Vektor ist nach dem Newton-Verfahren als

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{Newton}}^{(h)} = H(\mathbf{v}^{(h)})^{-1} J(\mathbf{v}^{(h)})^\top \mathbf{b}(\mathbf{v}^{(h)}) \quad (4.9)$$

definiert, wobei die approximierte Hesse-Matrix $H(\mathbf{v})$ durch

$$H(\mathbf{v}) \approx J(\mathbf{v})^\top J(\mathbf{v}) \quad (4.10)$$

gebildet wird [35]. Die Schätzung des Zustandsvektors wird analog zum Gradientenverfahren zu $\mathbf{v}^{(h+1)} = \mathbf{v}^{(h)} - \Delta \mathbf{v}_{\text{Newton}}^{(h)}$ aktualisiert.

Durch diese Kombination aus anfänglichem Gradientenabstieg und anschließendem Newton-Verfahren wird sowohl Stabilität in der Frühphase der Optimierung als auch eine schnelle Konvergenz in der Nähe des Minimums gewährleistet. Das Ergebnis liefert eine Annäherung an die aktuelle Position des Tags \mathbf{S}_t sowie die Ankerpositionen $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[\tilde{\mathbf{S}}_t^\top, \mathbf{0}^\top, \tilde{\mathbf{A}}_1^\top, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_N^\top \right]^\top \quad (4.11)$$

Diese Annäherung des Systemzustands $\tilde{\mathbf{x}}$ lässt sich als Initialisierung in das Particle-Filter integrieren, indem ein bestimmter Anteil der Partikelmenge aus einer multivariaten Gauß'schen Verteilung $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \Sigma_{\text{Newton}})$ gezogen wird [39]. Die Kovarianzmatrix $\Sigma_{\text{Newton}} \approx \sigma_{\text{UWB}}^2 (J^\top J)^{-1}$ kann dabei direkt aus dem Newton-Verfahren abgeleitet werden und entspricht näherungsweise der inversen Hesse-Matrix, die mit der Standardabweichung σ_{UWB} des UWB-Positionierungssystems skaliert wird.

In der frühen Phase, wenn nur wenige Messungen vorliegen und der UWB-Tag die Umgebung noch nicht ausreichend exploriert hat, sodass die Entfernungsmessungen keine günstige geometrische Verteilung bzw. Vielfalt aufweisen, scheitern zunächst viele Optimierungsversuche oder stagnieren in lokalen Minima. Die Wahrscheinlichkeit, eine korrekte Lösung zu finden, steigt jedoch durch wiederholte Optimierungsversuche, insbesondere weil jeweils unterschiedliche zufällige Teilmengen der Messdaten verwendet werden. Nach einiger Zeit wird mit hinreichender Wahrscheinlichkeit eine geeignete Konfiguration gefunden und das Particle-Filter konvergiert zu einer konsistenten Schätzung der Ankerpositionen [39].

Das Eintreten dieses Konvergenzzustands wird durch die kontinuierliche Berechnung der Fehlermetrik e_t zwischen den Filteraktualisierungen erkannt:

$$e_t = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\left\| \hat{\mathbf{A}}_{i,t} - \hat{\mathbf{S}}_t \right\| - d_{i,t} \right)^2} \quad (4.12)$$

Der Fehler ergibt sich aus der Differenz zwischen der berechneten Distanz $\|\hat{\mathbf{A}}_{i,t} - \hat{\mathbf{S}}_t\|$ und der tatsächlich gemessenen Distanz $d_{i,t}$. Dabei bezeichnen $\hat{\mathbf{A}}_{i,t}$ und $\hat{\mathbf{S}}_t$ die Particle-Filter Schätzungen der Ankerpositionen bzw. die geschätzte Position des UWB-Tags.

Nachdem eine geeignete Ankerkonfiguration gefunden wurde, fällt der tiefpassgefilterte Wert von e_t unter eine empirisch bestimmte untere Grenze ($e_t < 0,1$ m), die proportional zum Rauschen des Systems gewählt ist. Steigt der Fehler hingegen über einen oberen Schwellwert ($e_t > 0,3$ m), wird das nicht-probabilistische Optimierungsverfahren erneut angestoßen [39]. Auf diese Weise bleibt das System adaptiv, auch wenn neue Messungen eingehen, die mit dem aktuellen Filterzustand nicht kompatibel sind. Dies kann beispielsweise auftreten, wenn die Ankerkalibrierung in einem lokalen Minimum konvergiert ist, das nicht dem realen Systemzustand entspricht. Ebenfalls nachträgliche Änderungen an den Ankerpositionen können so erkannt und berücksichtigt werden.

4.2.2 Aktualisierung des Filters

Sobald der Konvergenzzustand erreicht ist, endet die zusätzliche nicht-probabilistische Optimierung und das Particle-Filter wird weiter nach dem bekannten rekursiven Algorithmus aktualisiert. Die folgenden Abschnitte beschreiben diesen Prozess im Detail.

Vorhersage

Im Vorhersageschritt werden alle Partikel mithilfe des Bewegungsmodells aktualisiert. Das UWB-Positionierungssystem hat in der Regel keine Kontrolle über die Bewegung des zu lokalisierenden Objekts. Zur Vorhersage der Bewegungsänderung kann daher nicht auf Steuerbefehle o. Ä. zurückgegriffen werden. Es wird stattdessen vereinfachend angenommen, dass die Aktion $\mathbf{u}_t = \Delta t$ lediglich die seit dem letzten Vorhersageschritt vergangene Zeit enthält und dass sich das Lokalisationsziel in dieser Zeit mit konstanter Geschwindigkeit bewegt [39]. Die neue Position $\mathbf{S}_t^{[k]}$ ergibt sich somit aus der Addition der zurückgelegten Strecke $\mathbf{V}_{t-1}^{[k]} \Delta t$ seit der letzten Vorhersage $t - 1$. Die Änderungen der Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{V}_t^{[k]}$ werden durch die Kovarianzmatrix $\Sigma_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0,1^2 \end{pmatrix}$ modelliert, die aus empirischen Daten bestimmt wurde.

$$\mathbf{S}_t^{[k]} = \mathbf{S}_{t-1}^{[k]} + \mathbf{V}_{t-1}^{[k]} \Delta t \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{V}_t^{[k]} = \mathbf{V}_{t-1}^{[k]} + \mathbf{X}_t^{[k]}, \quad \text{mit } \mathbf{X}_t^{[k]} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{V}}) \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.14)$$

Bei der Aktualisierung der Ankerpositionen wird unterschieden, ob sich das Filter noch in der Initialisierungsphase befindet oder bereits konvergiert ist. Da die UWB-Anker ortsfest sind und sich im Normalfall nicht bewegen, wird folgende Fallunterscheidung getroffen, um sicherzustellen, dass ihre Positionen nach dem Erreichen einer optimalen Schätzung nicht stärker verändert werden:

$$\mathbf{A}_{i,t}^{[k]} = \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{A}_{i,t-1}^{[k]}, \sigma^2) & \text{ist nicht konvergiert} \\ \mathcal{N}(a \cdot \mathbf{A}_{i,t-1}^{[k]} + (1-a) \cdot \bar{\mathbf{A}}_{i,t-1}, h^2 \cdot \Sigma_{\mathbf{A}_{i,t-1}}) & \text{ist konvergiert} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\forall k \in \{1, \dots, K\}$$

Während des Konvergenzprozesses werden die Partikel mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0,03 \text{ m}$ um die bisherigen Schätzungen der Ankerpositionen aktualisiert. Nach dem Abschluss der Initialisierung werden die Positionen der Anker nicht weiter signifikant verändert. Würden jedoch in jedem Schritt ausschließlich die vorherigen Werte unverändert übernommen, könnte dies langfristig zu einer Degeneration der Partikelmenge führen [39, 10]. Um diese Gefahr zu vermeiden, wird Kernel Smoothing [27] zur Aktualisierung eingesetzt. Dabei sind $\bar{\mathbf{A}}_{i,t-1}$ und $\Sigma_{\mathbf{A}_{i,t-1}}$ der gewichtete Mittelwert bzw. die Kovarianz der Position des i -ten Ankers über die gesamte Partikelmenge zum Zeitpunkt $t-1$. Die Konstanten $a = \frac{3\gamma-1}{2\gamma}$ und $h^2 = 1 - a^2$ hängen vom Dämpfungsfaktor $\gamma = 0,95$ ab [39].

Bevor das Kernel Smoothing, insbesondere die Bildung des Mittelwerts $\bar{\mathbf{A}}$, durchgeführt werden kann, ist zunächst eine gemeinsame geometrische Ausrichtung der voneinander unabhängigen Partikel erforderlich. Dieser Schritt wird in Abschnitt 4.2.3 erläutert.

Korrektur

Im Korrekturschritt erfolgt eine Neugewichtung der Partikel, die auf den aktuellen Messdaten und einem probabilistischen Sensormodell basiert. Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, umfassen die Messdaten $\mathbf{z}_t \subseteq \{d_{i,t} \mid i = 1, \dots, N\}$ dabei nur eine Teilmenge der Entfernungsmessungen $d_{i,t}$ des UWB-Tags zu den insgesamt N UWB-Ankern, da nicht zu jedem Zeitpunkt für jeden Anker eine gültige Messung vorliegt.

Das Sensormodell weist jedem Partikel gemäß der Gleichung (4.16) ein neues Gewicht zu. Dazu wird angenommen, dass die UWB-Entfernungsmessungen \mathbf{z}_t normalverteilt um die tatsächlichen Distanzen $\|\mathbf{A}_{i,t} - \mathbf{S}_t\|$ zwischen den UWB-Ankern $\mathbf{A}_{i,t}$ und dem UWB-Tag

\mathbf{S}_t streuen [39]. Die Partikel, die diese Lagebeziehung genauer widerspiegeln, erhalten entsprechend höhere Gewichte. Mit der Standardabweichung $\sigma_{\text{UWB}} = 0,3\text{ m}$ wird die Messunsicherheit des UWB-Systems berücksichtigt.

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\text{Gaussian},t}^{[k]} &= w_{t-1}^{[k]} \left(\frac{1}{\sigma_{\text{UWB}} \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\|\mathbf{A}_{i,t}^{[k]} - \mathbf{S}_t^{[k]}\| - \mathbf{z}_t}{\sigma_{\text{UWB}}} \right)^2 \right) \right) \\ \forall i &\in \{1, \dots, N \mid d_{i,t} \in \mathbf{z}_t\}, \\ \forall k &\in \{1, \dots, K\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Neben dem typischerweise normalverteilten Messrauschen tritt zusätzlich ein kleiner Anteil extremer Ausreißer auf, die durch äußere Einflüsse wie z. B. Reflexionen, Abschattungen, andere kurzzeitige Störungen etc. verursacht werden. Um diese Effekte ebenso zu berücksichtigen, wird ein gemischtes Sensormodell eingesetzt, das die Gauß'sche Verteilung mit einer gleichverteilten Komponente kombiniert [39]:

$$\tilde{w}_t^{[k]} = \alpha \frac{1}{2\delta} + (1 - \alpha) \cdot \tilde{w}_{\text{Gaussian},t}^{[k]}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.17)$$

wobei δ den maximal erwarteten Fehler von Messausreißern angibt und $0 \leq \alpha \leq 1$ den Anteil der Ausreißer beschreibt. Auf Basis empirischer Daten wurden die Parameter auf $\delta = 10\text{ m}$ und $\alpha = 0,05$ gesetzt.

Anschließend erfolgt eine Normalisierung der aktualisierten Gewichte. Dabei wird jedes unnormierte Gewicht $\tilde{w}_t^{[k]}$ durch die Summe aller Gewichte geteilt:

$$w_t^{[k]} = \frac{\tilde{w}_t^{[k]}}{\sum_{l=1}^K \tilde{w}_t^{[l]}} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.18)$$

Resampling

Das Resampling dient dazu, die Partikelmenge zu erneuern und Partikel mit sehr geringer Gewichtung durch höher gewichtete zu ersetzen [10]. Fällt die Metrik N_{eff} (vgl. Gleichung (3.13)) unter den Schwellenwert $N_{\text{eff}} < \frac{K}{2}$, wird ein Resampling durchgeführt. Hierzu kommt der Algorithmus Low-Variance-Resampling [36] zum Einsatz, der eine systematische Auswahl der zu replizierenden Partikel anhand ihrer Gewichte ermöglicht. Das Funktionsprinzip des Algorithmus wird im Folgenden erläutert und ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt.

Sei K die Anzahl der Partikel und $w_t^{[k]}$ mit $k \in \{1, \dots, K\}$ deren normalisierte Gewichte, sodass $\sum_{l=1}^K w_t^{[l]} = 1$ gilt.

1. Ausgehend von $C_0 = 0$ berechnet der Algorithmus zunächst die kumulativen Summen der Gewichte:

$$C_k = \sum_{l=1}^k w_t^{[l]} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.19)$$

2. Anschließend wird ein Zufallswert $r \sim \mathcal{U}(0, \frac{1}{K})$ als Startpunkt gezogen. Für jedes neue Partikel $l \in \{1, \dots, K\}$ wird die Position im kumulativen Gewichtsraum C als

$$u_l = r + \frac{l-1}{K} \quad \forall l \in \{1, \dots, K\} \quad (4.20)$$

definiert.

3. Für jedes u_l wird nun das kleinste k bestimmt, für das

$$C_{k-1} < u_l \leq C_k \quad \forall l \in \{1, \dots, K\} \quad (4.21)$$

gilt. Das entsprechende Partikel $\mathbf{x}_t^{[k]}$ wird als $\mathbf{x}_t^{[l]} = \mathbf{x}_t^{[k]}$ in die neue Partikelmenge übernommen. Auf diese Weise werden Partikel mit großen Gewichten proportional häufiger repliziert, während andere Partikel seltener ausgewählt werden [36, 25].

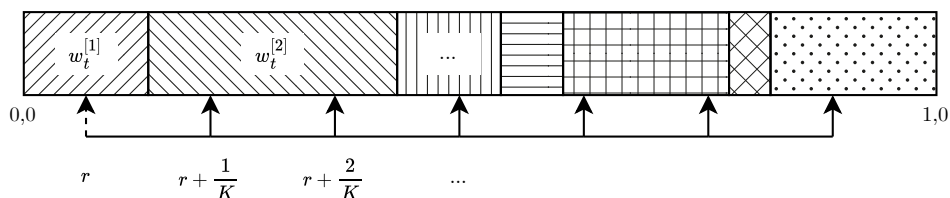


Abbildung 4.1: Funktionsprinzip des Low-Variance-Resampling Algorithmus. Es wird ein zufälliger Startwert r festgelegt und anschließend jene Partikel ausgewählt, deren Positionen im kumulativen Gewichtsraum $u_l = r + \frac{l-1}{K}$ entsprechen, wobei $l \in \{1, \dots, K\}$. Große Gewichte belegen im kumulativen Gewichtsraum mehr Platz als kleine Gewichte, sodass die zugehörigen Partikel mit größerer Wahrscheinlichkeit übernommen werden.

Bildquelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an [36].

Um die Diversität der Partikelmenge zu erhalten, wird jedem replizierten Partikel zusätzlich ein kleines, normalverteiltes Rauschen hinzugefügt:

$$\mathbf{x}_t^{[k]} \leftarrow \mathbf{x}_t^{[k]} + \boldsymbol{\epsilon}^{[k]}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\epsilon}^{[k]} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2) \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.22)$$

Während der Konvergenzphase wird eine Rauschstandardabweichung von $\sigma = 0,1 \text{ m}$ verwendet. Sobald das Filter zu den optimalen Ankerpositionen konvergiert ist, wird das Rauschen für die Ankerpositionen $\mathbf{A}_{i,t}^{[k]}$ auf $\sigma = 0,025 \text{ m}$ reduziert, um die sicheren Schätzungen nicht übermäßig zu beeinflussen.

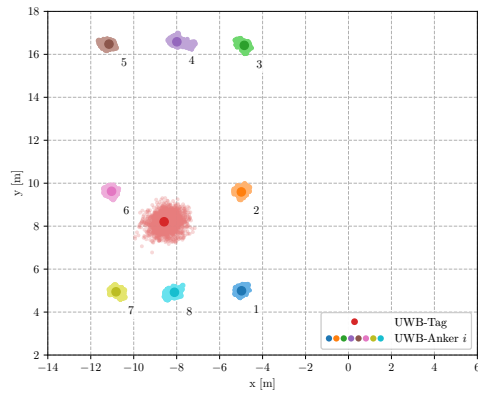
4.2.3 Ausrichtung der Partikelmenge

Zur Modellierung dieses Zustandsschätzungsproblems werden ausschließlich die Messdaten des UWB-Positionierungssystems verwendet, die die Entfernungen zwischen dem UWB-Tag und den einzelnen UWB-Ankern beschreiben. Diese Distanzen erfassen lediglich die interne Konfiguration des Systems, d. h. die relativen geometrischen Beziehungen zwischen Tag und Ankern. Eine absolute Positionierung oder Orientierung im globalen Koordinatensystem ist daraus jedoch nicht direkt ableitbar. Folglich sind sowohl die globale Translation als auch die Rotation des Zustandsvektors jedes Partikels $\mathbf{x}_t^{[k]}$ im Filter beliebig [39]. Es können mehrere isometrische Partikel existieren, die denselben relativen Systemzustand repräsentieren, sich aber in ihrer absoluten Lage oder Ausrichtung unterscheiden. Eine direkte Mittelwertbildung oder gemeinsame Gewichtung dieser Partikel ist somit nicht möglich.

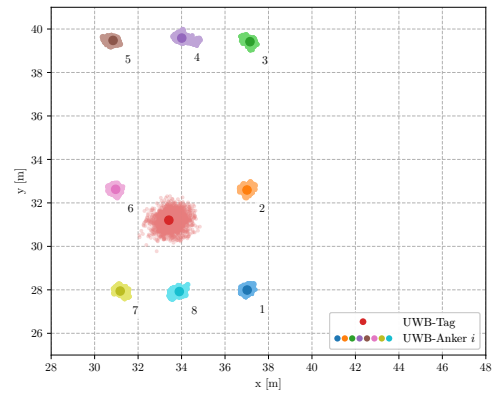
In Abbildung 4.2 wird dieses Problem anhand eines Beispiels veranschaulicht. Dargestellt ist eine Partikelmenge in vier äquivalenten Varianten:

- Ausgehend von dem ursprünglichen Partikel (Abbildung 4.2a) stellt auch
- ein translatorisch verschobener Partikel (Abbildung 4.2b),
- ein rotierter Partikel (Abbildung 4.2c) sowie
- ein gespiegelter Partikel (Abbildung 4.2d)

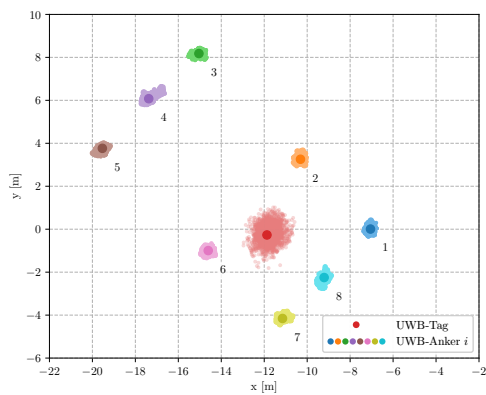
denselben Systemzustand dar. Die räumlichen Beziehungen zwischen den einzelnen Tag- und Ankerpositionen bleiben in allen Darstellungen identisch, während sich jedoch ihre absoluten Koordinaten unterscheiden.



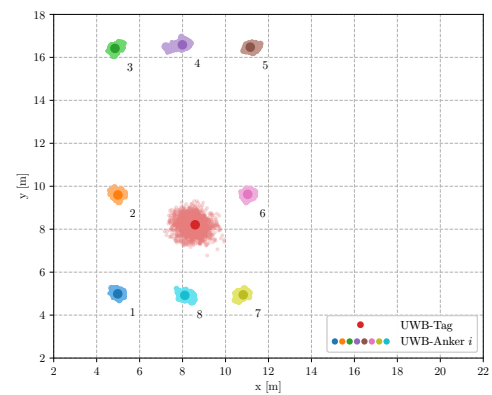
(a) Ursprünglicher Partikel.



(b) Translatorisch verschobener Partikel.



(c) Rotierter Partikel.



(d) Gespiegelter Partikel.

Abbildung 4.2: Beispielhafte Darstellungen isometrischer Transformationen derselben Partikelmenge. In allen Fällen bleiben die relativen Abstände und Winkel zwischen den Tag- und Ankerpositionen unverändert, während sich die absoluten Positionen ändern.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

Um eine gemeinsame Auswertung und insbesondere die Berechnung des gewichteten Mittelwerts über alle Partikel zu ermöglichen, muss die Partikelmenge zunächst kongruent ausgerichtet werden. Dabei wird für jeden Partikel eine Transformation bestimmt, die die interne Geometrie des Partikels an eine einheitliche Referenzlage ausrichtet. Die geometrischen Relationen innerhalb der Partikel, also die Abstände und Winkel zwischen Tag- und Ankerpositionen, bleiben dabei erhalten [39].

Zur Bestimmung der optimalen Transformationsparameter, der Rotationsmatrix R und des Translationsvektors $\boldsymbol{\tau}$, zwischen zwei Partikelzuständen $\mathbf{x}_t^{[k]}$ und $\mathbf{x}_t^{[l]}$ wird der mittlere quadratische Fehler

$$e^2(R, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{A}_i^{[k]} - (R \mathbf{A}_i^{[l]} + \boldsymbol{\tau}) \right\|^2 \quad (4.23)$$

der Ankerpositionen minimiert, wobei $\mathbf{A}_i^{[k]}$ die Position des i -ten UWB-Ankers im k -ten Partikel bezeichnet [39]. Um dieses Optimierungsproblem zu lösen, wird der Ansatz von Arun et al. (1987) [3] angewendet und die Singulärwertzerlegung zur Ermittlung der optimalen Rotationsmatrix genutzt.

Zunächst werden die Mittelwerte der Ankerpositionen

$$\boldsymbol{\mu}^{[k]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^{[k]} \quad (4.24a)$$

und

$$\boldsymbol{\mu}^{[l]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^{[l]} \quad (4.24b)$$

in beiden Partikelzuständen berechnet. Daraufhin kann die Kovarianzmatrix der beiden Punktmengen $\mathbf{A}^{[k]}$ und $\mathbf{A}^{[l]}$ durch

$$\Sigma_{k,l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i^{[k]} - \boldsymbol{\mu}^{[k]})(\mathbf{A}_i^{[l]} - \boldsymbol{\mu}^{[l]})^\top \quad (4.25)$$

angenähert werden. Unter Berücksichtigung von Gleichung (4.23) ergibt sich daraus die optimale Rotationsmatrix

$$R_{k,l} = VU^\top, \quad (4.26)$$

wobei $\Sigma_{k,l} = U\Lambda V^\top$ die Singulärwertzerlegung der Matrix $\Sigma_{k,l}$ ist [39, 3]. Zur Sicherstellung einer gültigen Rotationsmatrix wird überprüft, ob $\det(R_{k,l}) = +1$ gilt. Tritt der Fall $\det(R_{k,l}) = -1$ ein, deutet dies auf eine zusätzliche Spiegelung hin. In der Folge wird das Vorzeichen einer Achse in $V' = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertiert und die Rotation als $R_{k,l} = V'U^\top$ bestimmt [3].

Die zugehörige Translation $\boldsymbol{\tau}_{k,l}$ ergibt sich darauffolgend aus [3]:

$$\boldsymbol{\tau}_{k,l} = \boldsymbol{\mu}^{[l]} - R_{k,l} \boldsymbol{\mu}^{[k]} \quad (4.27)$$

Anschließend werden alle Partikel auf einen gemeinsamen Referenzpartikel ausgerichtet, das als der wahrscheinlichste Partikel angenommen wird (hier exemplarisch der erste Partikel der Menge, $l = 1$). Die Ausrichtung jeder Ankerposition, der Position sowie des Geschwindigkeitsvektors des Tags wird berechnet durch [39]:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{[k]} = R_{k,1} \mathbf{A}^{[k]} + \boldsymbol{\tau}_{k,1} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.28a)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{[k]} = R_{k,1} \mathbf{S}^{[k]} + \boldsymbol{\tau}_{k,1} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.28b)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}^{[k]} = R_{k,1} \mathbf{V}^{[k]} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.28c)$$

Die kongruente Ausrichtung der Partikel erfolgt im rekursiven Update des Particle-Filters jeweils zu Beginn, vor dem Vorhersageschritt. Dadurch wird gewährleistet, dass während der Vorhersage das Kernel Smoothing zur Aktualisierung der Ankerpositionen (vgl. Abschnitt 4.2.2) durchgeführt werden kann und dass am Ende jedes Filterupdates die Schätzung des aktuellen Systemzustands $\hat{\mathbf{x}}_t$ gemäß Gleichung (3.14) als gewichteter Mittelwert über alle Partikel gebildet werden kann.

4.3 Transformation in ein globales Koordinatensystem

Ein Nachteil Anker-freier Positionierungssysteme ist, wie im Grundlagenkapitel 2.2.1 beschrieben, dass die Positionsmessungen zunächst nur in einem lokalen Koordinatensystem vorliegen. Da die Distanzmessungen des UWB-Positionierungssystems ausschließlich relative Abstände zwischen Tag und Ankern liefern und keine weiteren Vorbedingungen bekannt sind, ist die absolute Orientierung oder Position im Raum unbekannt [39]. Dies trifft ebenfalls auf die hier vorgestellte automatische Kalibrierung der Ankerpositionen mithilfe des Particle-Filters zu. Das lokale Koordinatensystem entsteht indirekt durch die zufällig gewählten Startbedingungen und ist gegenüber dem globalen Bezugssystem beliebig verschoben, rotiert oder gespiegelt.

In vielen praktischen Anwendungen ist jedoch ein Bezug zu einem globalen Koordinatensystem erforderlich [24]. Dadurch ist es beispielsweise möglich, die Positionsschätzungen

des UWB-Tags bzw. die ermittelten Ankerpositionen in vorhandene Karten oder Modelle zu integrieren, zur Navigation mit absoluten Koordinaten zu verwenden oder um wiederholte Messungen in derselben Umgebung mit identischen Bezugspunkten durchzuführen.

Sind die Positionen von mindestens drei nicht kollinearen Ankern im globalen Koordinatensystem bekannt, lässt sich die Abbildung vom lokalen auf das globale System im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 eindeutig bestimmen [5]. Hierzu wird die in Abschnitt 4.2.3 eingeführte kongruente Transformation nicht wie bisher zur internen Ausrichtung der Partikel verwendet, sondern zur Überführung der geschätzten Ankerpositionen in das globale Bezugssystem. Die Transformationsparameter R_{global} und τ_{global} werden so bestimmt, dass die im globalen System bekannten Ankerpositionen \mathbf{A}'_p mit $p \in \{1, \dots, N \mid \text{globale Position ist bekannt}\}$ und die lokal geschätzten Positionen \mathbf{A}_p bestmöglich übereinstimmen [24]:

$$R_{\text{global}}, \tau_{\text{global}} = \arg \min_{R, \tau} \sum_{p \in \mathcal{A}} \|\mathbf{A}'_p - (R \mathbf{A}_p + \tau)\|^2, \quad (4.29)$$

wobei \mathcal{A} die Menge der Anker mit bekannten globalen Koordinaten bezeichnet. Unterscheiden sich zudem die Maßstäbe der beiden Systeme, muss die Abbildung optional um eine Skalierungskomponente erweitert werden.

Innerhalb des Particle-Filters wird diese Abbildung für jeden Partikel $\mathbf{x}^{[k]}$ angewendet, indem die Partikel gemäß den aus Gleichungen (4.28) bekannten Berechnungen transformiert werden:

$$\mathbf{x}'^{[k]} = R_{\text{global}} \mathbf{x}^{[k]} + \tau_{\text{global}} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4.30)$$

Das Particle-Filter arbeitet dadurch implizit im globalen Koordinatensystem, sodass alle weiteren Schritte des rekursiven Filterupdates, und insbesondere die Berechnung des geschätzten Systemzustands, direkt in globalen Koordinaten erfolgen. Das zugrunde liegende Filterdesign muss hierfür nicht explizit angepasst oder erweitert werden.

Die Bestimmung der mindestens drei benötigten bekannten Standorte der UWB-Anker kann in der Praxis auf verschiedene Weise erfolgen. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, die Anker gezielt an Positionen zu platzieren, deren globale Koordinaten bereits bekannt sind, etwa an Vermessungspunkten oder anderen festen Referenzmarken. Im Außenbereich können die Koordinaten einzelner Anker auch mithilfe von GPS- bzw. GNSS-

Empfängern bestimmt werden [24]. Befinden sich die Anker an markanten Punkten, z. B. an Gebäudekanten, Laternen- oder Antennenmasten, lassen sich ihre Positionen zudem nachträglich durch den Abgleich mit Luftbildern ermitteln [18]. In Innenräumen oder abgeschirmten Umgebungen kann die Lage der UWB-Anker alternativ manuell eingemessen [5] oder anhand vorhandener Pläne und Grundrisse festgelegt werden.

4.4 Fisher-Information

Die Fisher-Information beschreibt die Informationsmenge, die eine Messreihe \mathbf{z} über einen oder mehrere unbekannte Parameter enthält. Sie bildet damit ein zentrales Maß für die Güte und den Informationsgehalt von Messdaten im Hinblick auf die Schätzbarkeit eines zugrunde liegenden Parameters. Für einen unbekannten Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ und eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\mathbf{z} \mid \boldsymbol{\theta})$ ist die Fisher-Informationsmatrix definiert als [6, 13]:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p(\mathbf{z} \mid \boldsymbol{\theta}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p(\mathbf{z} \mid \boldsymbol{\theta}) \right)^\top \right], \quad (4.31)$$

wobei \mathbb{E} für den Erwartungswert steht.

Die Fisher-Information quantifiziert die Sensitivität der Likelihood-Funktion bezüglich des Parameters $\boldsymbol{\theta}$ und gibt somit Aufschluss über die maximale Information, die eine Messung über den wahren Wert von $\boldsymbol{\theta}$ enthält. Eine große Fisher-Information bedeutet, dass kleine Änderungen von $\boldsymbol{\theta}$ eine deutliche Änderung der Likelihood hervorrufen, die Parameter also gut unterscheidbar sind. Umgekehrt weist eine kleine Fisher-Information auf eine geringe Sensitivität hin, was zu hohen Schätzunsicherheiten führt [6].

In direktem Zusammenhang mit der Fisher-Information steht die Cramér-Rao-Schranke

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq \frac{1}{\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})}, \quad (4.32)$$

die eine theoretische Untergrenze für die Kovarianz jeder erwartungstreuen Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ angibt [6]. Die Matrix $\frac{1}{\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})}$ beschreibt die minimale Varianz, die ein unverzerrter Schätzer bei gegebenem Messmodell bestenfalls erreichen kann. Demzufolge definiert die Cramér-Rao-Schranke ein unteres Limit der Schätzgenauigkeit. Kein erwartungstreuer Schätzer kann eine Kovarianzmatrix besitzen, deren Einträge kleiner sind als die entsprechenden

Elemente von $\frac{1}{\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})}$ [13]. In der Praxis wird die Fisher-Information genutzt, um den Informationsgehalt von Messdaten quantitativ zu bewerten und Messkonfigurationen so zu gestalten, dass die Schätzunsicherheit minimiert wird.

In einem UWB-Positionierungssystem mit N ortsfesten Ankern \mathbf{A}_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ und einem zu lokalisierenden Tag \mathbf{S} kann die Fisher-Information dazu verwendet werden, die geometrische Anordnung der Anker im Verhältnis zur Position des Tags zu bewerten. Die Grundlage bildet das aus Gleichung (4.1) bekannte Messmodell

$$d_i = \|\mathbf{A}_i - \mathbf{S}\| + \eta_i, \quad (4.33)$$

wobei die Erweiterung um $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ einen Gauß'schen Messfehler mit der Varianz σ_i^2 berücksichtigt. Die Likelihood-Funktion der gemessenen Distanzen $\mathbf{z} \subseteq \{d_i \mid i = 1, \dots, N\}$ unter der Annahme von \mathbf{S} lautet entsprechend:

$$p(\mathbf{z} \mid \mathbf{S}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\|\mathbf{A}_i - \mathbf{S}\| - d_i}{\sigma_i} \right)^2 \right) \quad (4.34)$$

Eine ähnliche Formulierung der Likelihood-Funktion wird ebenfalls im Korrekturschritt des Particle-Filters (vgl. Gleichung (4.16)) verwendet.

Für diese Modellierung ergibt sich die Fisher-Informationsmatrix bezüglich der Position des Tags \mathbf{S} als:

$$\mathbf{I}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{J}_i^\top \mathbf{J}_i, \quad (4.35)$$

wobei \mathbf{J}_i die Ableitung des Messmodells aus Gleichung (4.33) nach \mathbf{S} beschreibt und damit dem Gradienten der Distanzfunktion für die i -te Messung entspricht:

$$\mathbf{J}_i = \frac{\partial d_i}{\partial \mathbf{S}} = -\frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{S}}{\|\mathbf{A}_i - \mathbf{S}\|} \quad (4.36)$$

Die Fisher-Informationsmatrix gibt demnach an, wie stark die Distanzmessungen \mathbf{z} die Schätzung der Position des UWB-Tags \mathbf{S} beeinflussen.

Im Rahmen der automatischen Ankerkalibrierung kann die zuvor entwickelte Anwendung der Fisher-Information als Metrik genutzt werden, um zu bewerten, an welchen Positionen eine zusätzliche Messung des UWB-Tags besonders informativ wäre. Dazu

wird für eine Menge möglicher, relevanter Aufenthaltsorte \mathbf{S} im Testgebiet die Fisher-Informationsmatrix gemäß Gleichung (4.35) berechnet und ihre Determinante $\det(\mathbf{I}(\mathbf{S}))$ als Maß für den Informationsgehalt ausgewertet. Hohe Werte dieses Maßes bezeichnen Positionen, an denen bereits kleine Positionsänderungen des Tags eine große Änderung der gemessenen Distanzen bewirken, also ein hoher Informationsgewinn zu erwarten ist.

Wird das lokale UWB-Koordinatensystem in ein globales Bezugssystem überführt (vgl. Abschnitt 4.3), kann der Informationsgehalt über das gesamte Messgebiet hinweg berechnet und in die vorhandene Karte integriert werden. Dadurch lassen sich Bereiche mit hoher und niedriger Informationsdichte gezielt identifizieren. Die Bewegung des UWB-Tags kann anschließend bevorzugt in Richtungen hoher Informationsdichte gesteuert werden, um die Exploration der Umgebung effizienter zu gestalten und die Konvergenz sowie die Stabilität des Particle-Filters zu verbessern.

5 Experimente und Ergebnisse

Die Leistungsfähigkeit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode zur automatischen Kalibrierung von Ankerpositionen in einem UWB-Positionierungssystem wurde umfassend experimentell evaluiert. Dazu wurden verschiedene Experimente in einem Indoor-Szenario mit unterschiedlichen Testaufbauten und -abläufen durchgeführt. Dabei wurde insbesondere analysiert, wie zuverlässig die Methode die tatsächlichen Standorte der Anker reproduzieren kann und welche Genauigkeit bei der Positionsbestimmung des Tags erreicht wird. Darüber hinaus werden weiterführende Fragestellungen betrachtet, die speziell das Verhalten des eingesetzten Particle-Filters behandeln. Das Ziel ist es, sowohl die vorteilhaften Aspekte als auch potenzielle Schwächen des gewählten Filterdesigns zu identifizieren.

Konkret sollen durch die Experimente folgende Fragestellungen untersucht werden:

- 5.2.1 Wie genau lassen sich die Ankerpositionen rekonstruieren? Welche Genauigkeit kann bei der Positionsbestimmung des Tags erzielt werden?
- 5.2.2 Wie verhält sich das Particle-Filter, wenn sich die Position eines Anker nach der Initialisierung verändert?
- 5.2.3 Welche Rolle spielt die Trajektorie des Tags für die Konvergenzgeschwindigkeit des Particle-Filters?
- 5.2.4 Inwiefern hängt die Konvergenzgeschwindigkeit des Particle-Filters von der räumlichen Anordnung der Anker ab?
- 5.2.5 Wie lässt sich die Initialisierung mithilfe der Fisher-Information optimieren?

Dieses Kapitel beschreibt zunächst den allgemeinen Versuchsaufbau und die Versuchsdurchführung. Anschließend werden die Ergebnisse der einzelnen Experimente detailliert präsentiert und diskutiert. Die Bewertung der Genauigkeit bei der Bestimmung der Tag- und Ankerpositionen erfolgt anhand von Ground Truth Messungen.

5.1 Aufbau der Testumgebung

Für die Experimente wurde ein UWB-Positionierungssystem in einer Dreifeldsporthalle (s. Abbildung 5.1) mit den Abmessungen von $21,5 \times 44$ m installiert. Die Sporthalle ist als Testumgebung besonders geeignet, da eine große, freie Fläche zur Verfügung steht. Die Spielfeldmarkierungen auf dem Hallenboden erleichtern zudem die Orientierung beim Aufbau und der Positionierung der UWB-Anker sowie bei der späteren Durchführung der Versuche.

Das eingesetzte UWB-Positionierungssystem basiert auf dem in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen eigenentwickelten UWB-Beacon. Der Versuchsaufbau besteht aus acht stationären UWB-Beacons, die als Anker konfiguriert wurden. Für die Montage in einer einheitlichen Höhe von 1,15 m wurden die Anker auf Stativen befestigt. In den folgenden Experimenten werden unterschiedliche räumliche Anordnungen dieser Anker untersucht.

Der zu lokalisierende UWB-Tag wurde auf Fahrzeugen montiert. Eingesetzt wurde dazu unter anderem ein *LEGO® MINDSTORMS®* Roboter (s. Abbildung 5.2), der entlang vorab programmierter Pfade durch das Testfeld bewegt werden kann. Dadurch lassen sich Trajektorien unter vergleichbaren Bedingungen wiederholen. Aufgrund mechanischer Toleranzen in Achsen, Lagern und Motoren des Spielzeugroboters sind die Trajektorien jedoch nicht exakt reproduzierbar. Zur Untersuchung der hier betrachteten Fragestellungen ist eine annähernde Wiederholbarkeit der Pfade dennoch ausreichend. Für Versuche, bei denen keine feste Trajektorie vorgegeben ist, stand ergänzend ein ferngesteuertes Modellauto (s. Abbildung 5.3) zur Verfügung. Dieses Auto kann flexibel von Hand mit einer Geschwindigkeit von ca. 2 m s^{-1} durch die Sporthalle gesteuert werden.

Zur Vergleichbarkeit und Bewertung der Genauigkeit der UWB-Positionsbestimmung wurden die Positionen der UWB-Anker und des Tags zudem von einem zweiten Positionierungssystem erfasst, das Ground Truth Daten liefert. Hierfür waren die UWB-Anker und die beiden Fahrzeuge mit speziellen ArUco-Markern (vgl. Abbildungen 5.2 und 5.3) ausgestattet.

5.1.1 ArUco-Tracking

Das ArUco-Tracking basiert auf einem markerbasierten, visuellen Verfahren zur Erfassung der Position und Orientierung von Objekten [12]. Hierzu werden speziell entworfene,



Abbildung 5.1: Versuchsaufbau des UWB-Positionierungssystems in einer Dreifeldsporthalle. Insgesamt acht UWB-Anker wurden auf Stativen rund um das Spielfeld platziert und jeweils mit einem ArUco-Marker versehen. Eine an der Hallendecke montierte Kamera erfasst die Marker und stellt darauf basierende Ground Truth Messungen bereit.



Abbildung 5.2: *LEGO® MINDSTORMS®* Roboter mit UWB-Tag und ArUco-Marker. Mithilfe des Roboters können vorab programmierte Testpfade unter vergleichbaren Bedingungen wiederholt werden.



Abbildung 5.3: Ferngesteuertes Modellauto mit UWB-Tag und ArUco-Marker. Das Auto lässt sich beliebig durch das Testgebiet steuern und eignet sich so für flexible Testszenarien.

Bildquellen: Eigene Darstellungen.

schwarz-weiße Marker mit eindeutigen IDs verwendet, die von einer Kamera aufgenommen und mittels Bildverarbeitungsalgorithmen erkannt werden. Unter Verwendung der zuvor kalibrierten intrinsischen Kameraparameter (Brennweite, optisches Zentrum, Verzerrungskoeffizienten) kann aus den Bildkoordinaten der Marker die 6D-Pose in der realen Welt, bestehend aus 3D-Position und 3D-Orientierung relativ zur Kamera, berechnet werden [12, 17].

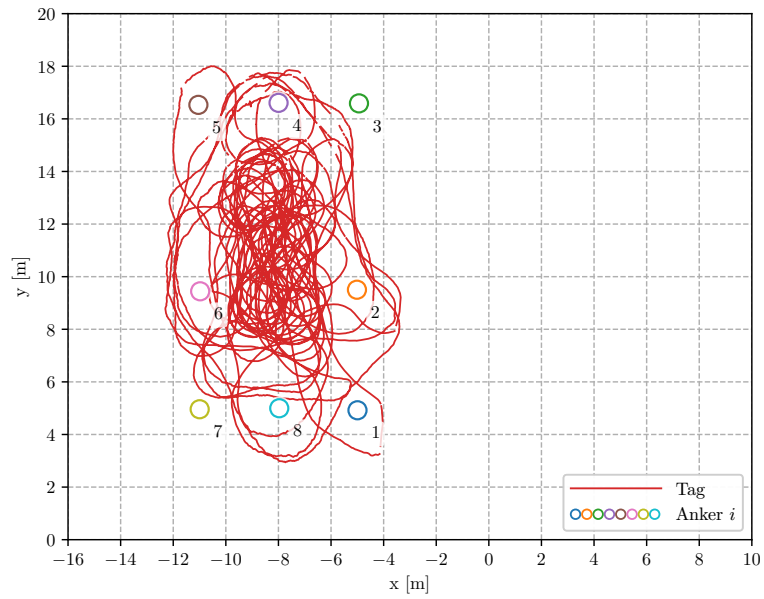
In den nachfolgenden Experimenten dient das ArUco-Tracking zur Erfassung von Ground Truth Messungen, die als Referenz für den Vergleich mit den Ergebnissen des UWB-Positionierungssystems herangezogen werden. Dazu wurde unter der Decke der Sporthalle eine Kamera installiert, die die ArUco-Marker auf den UWB-Ankern sowie am UWB-Tag erfasst. Als Kamerasystem kam ein *iPhone 14 Pro* mit Ultraweitwinkelobjektiv zum Einsatz. Das große Sichtfeld der Ultraweitwinkellinse ermöglicht die Abdeckung eines großen Bereichs der Sporthalle. Allerdings führt die für Ultraweitwinkel typische starke Verzeichnung an den Bildrändern trotz Kamerakalibrierung zu einer reduzierten Genauigkeit der Ground Truth Daten in den Randbereichen.

5.2 Experimente

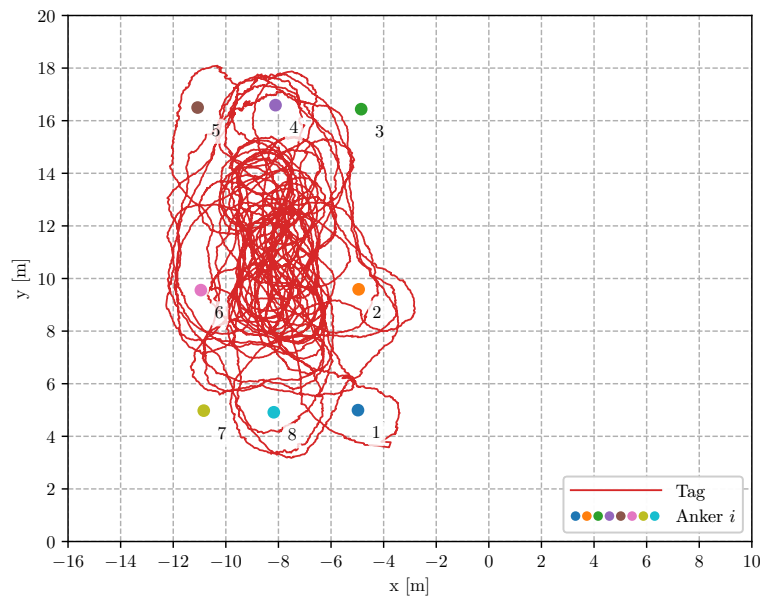
Im Folgenden werden die durchgeführten Experimente einschließlich der Diskussion der Versuchsergebnisse vorgestellt. Weiteres Material ist zudem auf der beiliegenden CD (vgl. Anhang A) zu finden. Das Ziel der Experimente ist es, die fünf zuvor formulierten Fragestellungen zur Bewertung des UWB-Positionierungssystems und des beschriebenen Verfahrens zur automatischen Kalibrierung der Ankerpositionen zu untersuchen.

5.2.1 Allgemeine Auswertung der automatischen Ankerkalibrierung

In diesem Experiment soll allgemein untersucht werden, wie präzise der vorgeschlagene Ansatz die Ankerpositionen bestimmen kann und welche Genauigkeit bei der Lokalisierung des UWB-Tags erreicht wird. Dazu wurde mithilfe des zuvor beschriebenen Versuchsaufbaus in der Sporthalle laufend die Position des ferngesteuerten Autos erfasst, das auf einer möglichst unregelmäßigen Trajektorie durch das Testgebiet gesteuert wurde. Die acht UWB-Anker waren dabei in einer rechteckigen Konfiguration angeordnet. Die Abbildung 5.4 zeigt die Anordnung der Anker sowie die Trajektorie des Fahrzeugs, basierend auf den ArUco-Trackingdaten bzw. der Schätzung durch das Particle-Filter.



(a) Messungen der Tag- und Ankerpositionen durch das ArUco-Tracking.



(b) Schätzungen der Tag- und Ankerpositionen durch das Particle-Filter.

Abbildung 5.4: Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Experiment 5.2.1. Dargestellt ist ein Vergleich zwischen den Ground Truth ArUco-Messungen (a) und der Schätzung durch das Particle-Filter (b).

Bildquelle: Eigene Darstellung.

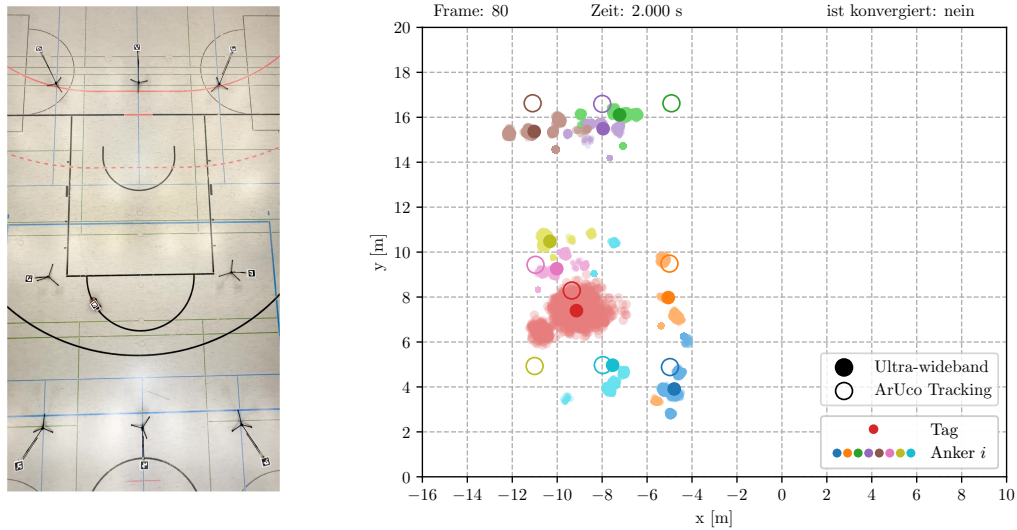
In Abbildung 5.4b sind ausschließlich die Positionen dargestellt, an denen das Particle-Filter bereits konvergiert ist. Dementsprechend ist der anfängliche Teil der Trajektorie während der Initialisierungsphase nicht abgebildet. Die in Abbildung 5.4a gezeigten ArUco-Messungen sind hingegen beschränkt auf das Sichtfeld der Kamera. Während der Versuche wurde darauf geachtet, dass sich das Testfahrzeug überwiegend innerhalb dieses Bereichs bewegt.

Die Testfahrt mit dem ferngesteuerten Auto dauerte insgesamt 468 s. Zu Beginn liegen dem Particle-Filter keinerlei Informationen über die Positionen der Anker oder des Tags vor. Der Algorithmus startet daher mit der nicht-probabilistischen Initialisierungsphase (vgl. Abschnitt 4.2.1), um erste Schätzungen der Ankerpositionen zu ermitteln. Dieser anfängliche Zustand zum Zeitpunkt $t = 2,0$ s ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

Die Abbildung 5.5 beinhaltet sowohl die durch die Overhead-Kamera erfasste Szene als auch eine kombinierte Karte mit den zugehörigen Positionsbestimmungen aus den ArUco-Trackingdaten und den Schätzungen des Particle-Filters. In der Karte ist die Position des UWB-Tags in rot dargestellt. Die weiteren Farben kennzeichnen jeweils die einzelnen Positionen der UWB-Anker A_i . Ausgefüllte Marker repräsentieren dabei die Schätzungen des Particle-Filters, während die nicht ausgefüllten Marker die durch das ArUco-Tracking ermittelten Referenzpositionen angeben. Mit geringerer Intensität ist zusätzlich die gesamte Partikelmenge des Particle-Filters eingezeichnet. Die Größe der einzelnen Marker ist dabei proportional zu ihrem Gewicht $w_t^{[k]}$, sodass die Darstellung einen Einblick in die aktuell wahrscheinlichsten geschätzten Systemzustände $\mathbf{x}_t^{[k]}$ des Filters gibt. Um die Positionsmessungen der beiden Systeme in einer gemeinsamen Karte vergleichen zu können, wurden die Schätzungen des Particle-Filters nachträglich mittels einer erneuten kongruenten Transformation (vgl. Abschnitt 4.2.3) auf das Koordinatensystem des ArUco-Trackings ausgerichtet.

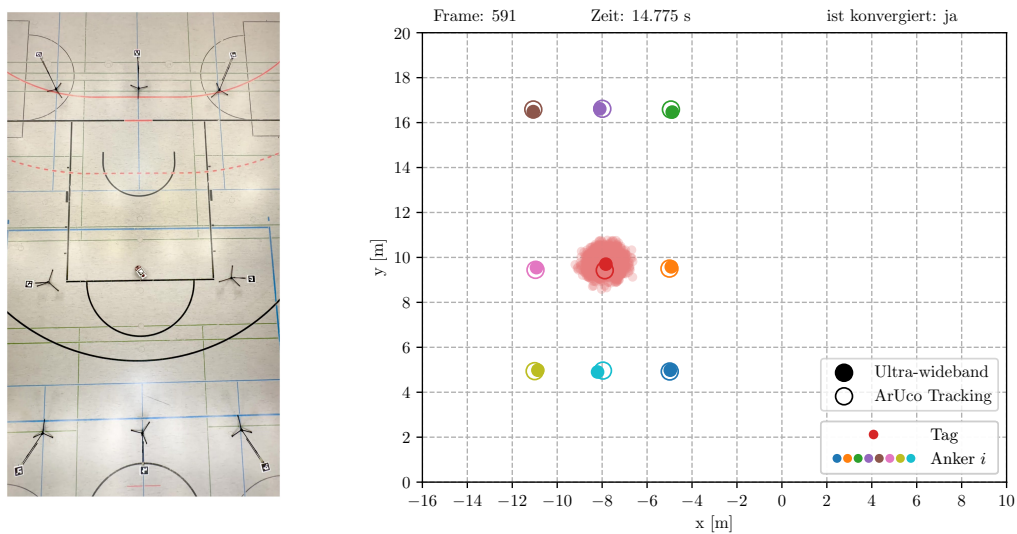
Wie in der Abbildung erkennbar ist, weichen die geschätzten Positionen in dieser frühen Phase (nach 2,0 s) noch deutlich vom Ground Truth ab. Nach etwa 14,8 s konvergiert der Algorithmus, d. h. es wurde eine stabile und konsistente Schätzung der Ankerpositionen gefunden. Der entsprechende Zustand zum Zeitpunkt $t = 14,8$ s ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Hier zeigt sich, dass die vom Particle-Filter geschätzten Positionen der UWB-Anker und des Tags nun dicht an den durch das ArUco-Tracking ermittelten Ground Truth Messungen liegen.

Die Initialisierungsphase der automatischen Ankerkalibrierung lässt sich ebenfalls anhand der Abbildungen 5.7 und 5.8 nachvollziehen. Die Abbildung 5.7 stellt den zeitlichen Ver-



(a) Overhead-Aufnahme. (b) Tag- und Ankerpositionen aus UWB- und ArUco-Messungen.

Abbildung 5.5: Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands während der Initialisierungsphase im Experiment 5.2.1.



(a) Overhead-Aufnahme. (b) Tag- und Ankerpositionen aus UWB- und ArUco-Messungen.

Abbildung 5.6: Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands nach Konvergenz der automatischen Ankerkalibrierung im Experiment 5.2.1.

Bildquellen: Eigene Darstellungen.

lauf der intern berechneten, tiefpassgefilterten Fehlermetrik e_t des Particle-Filters (vgl. Abschnitt 4.2.1, Gleichung (4.12)) dar. Eingezeichnet sind außerdem die obere und die untere Schwellgrenze, deren Unterschreitung das Ende der Initialisierungsphase markiert, bzw. eine Überschreitung der oberen Grenze den nicht-probabilistischen Initialisierungsprozess erneut startet. Zu Beginn weist der Fehler erwartungsgemäß einen hohen Wert auf, da die Partikelmenge noch zufällig verteilt ist und der tatsächliche Systemzustand noch nicht angenähert wurde. Nach etwa 14,8s fällt die geglättete Fehlermetrik unter den unteren Grenzwert ($e_t < 0,1$ m), womit die Initialisierung abgeschlossen wird. Anschließend stabilisiert sich der Fehler auf einem niedrigen Niveau von durchschnittlich etwa 10,8 cm. Lediglich nach rund 110s ist ein stärkerer, kurzzeitiger Anstieg der Fehlermetrik knapp unterhalb der oberen Grenze zu erkennen, der jedoch nicht zu einem erneuten Initialisierungsvorgang führt. Dieser Anstieg lässt sich vermutlich auf die Fahrweise des Modellfahrzeugs zurückführen. In diesem Zeitraum wurde das Auto bzw. der UWB-Tag mehrfach abrupt angehalten und wieder beschleunigt. Das in Abschnitt 4.2.2 beschriebene Bewegungsmodell des Particle-Filters ist ungeeignet für diese ungleichförmigen Bewegungen, was sich temporär auf den Fehler auswirkt.

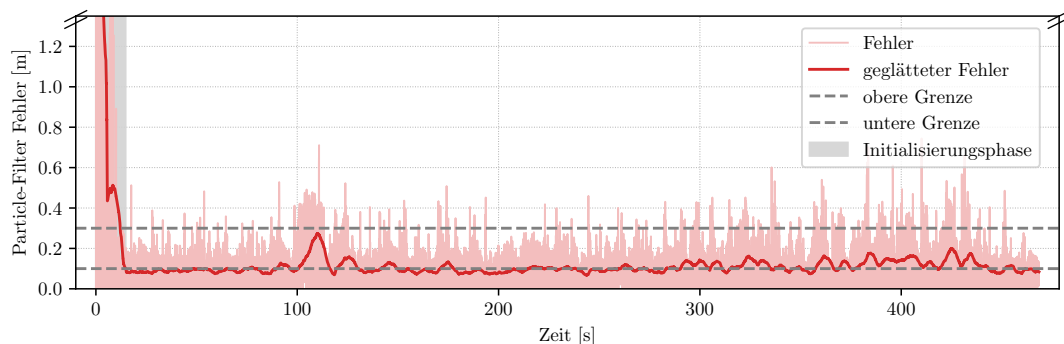


Abbildung 5.7: Zeitlicher Verlauf der internen Fehlermetrik e_t des Particle-Filters im Experiment 5.2.1. Nach etwa 14,8s fällt der geglättete Fehler unter den unteren Grenzwert (0,1 m) und beendet damit die Initialisierungsphase. Im weiteren Verlauf bleibt e_t überwiegend auf einem niedrigen Niveau von durchschnittlich rund 10,8 cm. Ein kurzzeitiger Ausreißer bei $t \approx 110$ s ist mutmaßlich auf plötzliche Änderungen der Bewegung des UWB-Tags zurückzuführen. Leichte Schwankungen ab $t \approx 300$ s deuten auf geringfügige Unsicherheiten bei der Positionsschätzung in den Randbereichen des Testgebiets hin.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

Das Diagramm in Abbildung 5.8 zeigt die Abweichung (euklidische Distanz) zwischen der vom ArUco-Tracking ermittelten Position des Tags und der vom Particle-Filter geschätzten Position im zeitlichen Verlauf. Erneut ist deutlich zu erkennen, dass die Abweichung während der Initialisierungsphase zunächst groß ist und nach der Konvergenz der Ankerpositionen stark abnimmt. Nach Abschluss der Initialisierung beträgt der mittlere Positionsfehler etwa 13,4 cm bei einer Standardabweichung von 6,2 cm. Ein kurzzeitiger Anstieg der Abweichung um $t \approx 110$ s korrespondiert mit dem zuvor beobachteten Peak in der internen Fehlermetrik des Particle-Filters. Ab $t \approx 300$ s treten zudem leicht erhöhte Schwankungen des Fehlers auf, die in abgeschwächter Form auch in der internen Fehlermetrik (vgl. Abbildung 5.7) erkennbar sind. In diesem Zeitraum befand sich der UWB-Tag überwiegend in den Randbereichen des Testgebiets, die zuvor nur selten befahren wurden. Die kalibrierten Ankerpositionen sind für diese geometrische Konstellation offenbar weniger gut bestimmt als für den zentralen Testbereich, was die leicht erhöhte Fehlervarianz erklärt. Die stärkeren Schwankungen in den Positionsabweichungen zwischen ArUco-Tracking und Particle-Filter Schätzung sind vermutlich zusätzlich auf die optischen Verzerrungen der ArUco-Trackingdaten an den Bildrändern infolge der Weitwinkeloptik zurückzuführen.

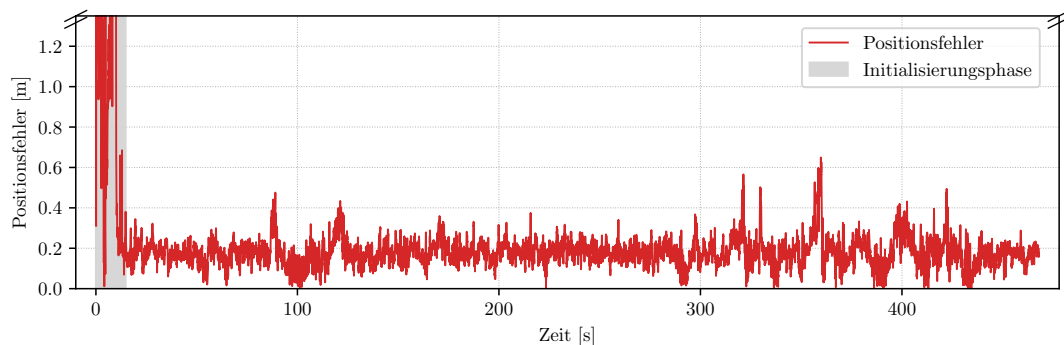


Abbildung 5.8: Zeitlicher Verlauf der Abweichung zwischen der vom ArUco-Tracking gemessenen und der vom Particle-Filter geschätzten Tagposition im Experiment 5.2.1. Nach Abschluss der Initialisierung stabilisiert sich der mittlere Positionsfehler bei rund 13,4 cm mit einer Standardabweichung von 6,2 cm. Kurzzeitige Abweichungen um $t \approx 110$ s sowie erhöhte Schwankungen ab $t \approx 300$ s sind vermutlich auf abrupte Bewegungsänderungen und geringere Genauigkeit des ArUco-Trackings in den Randbereichen des Testgebiets zurückzuführen.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

Eine weiterführende statistische Analyse der Genauigkeit der Positionsbestimmung des UWB-Tags erfolgt anhand der kumulativen Häufigkeitsverteilung der Positionsfehler. Die Abbildung 5.9 zeigt die Verteilung der Abweichungen zwischen den durch das ArUco-Tracking bestimmten und den vom Particle-Filter geschätzten Tagpositionen. Aus der Darstellung geht unter anderem hervor, dass 8,1 % aller Positionsbestimmungen eine Abweichung von weniger als 10 cm aufweisen. In 96,2 % der Fälle ist der Fehler kleiner als 30 cm. Der Streukreisradius (engl. Circular Error Probable (CEP)), innerhalb dessen 50 % aller Positionsschätzungen liegen, beträgt 17,7 cm.

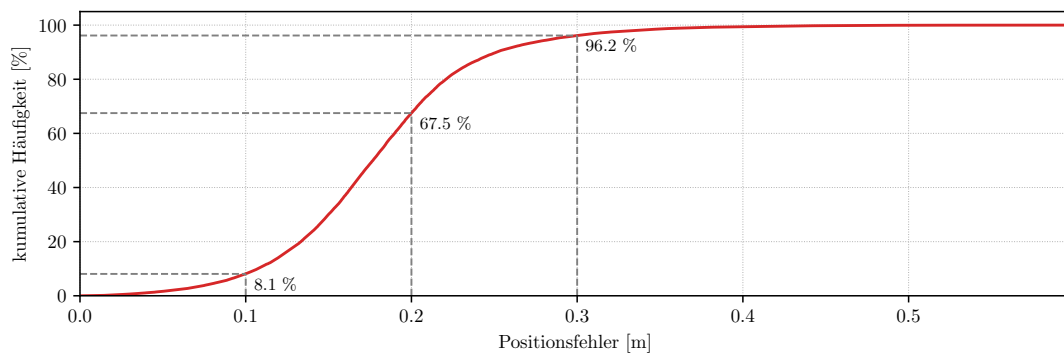


Abbildung 5.9: Kumulative Häufigkeitsverteilung der Positionsfehler zwischen ArUco-Tracking und Particle-Filter Schätzung im Experiment 5.2.1. In 96,2 % der Fälle weisen die UWB-Positionsschätzungen einen Fehler von unter 30 cm auf, 67,5 % der Werte liegen innerhalb eines Fehlerradius von 20 cm und 8,1 % sind genauer als 10 cm.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

Zur Analyse der Genauigkeit der geschätzten Ankerpositionen enthält die Tabelle 5.1 die Abweichungen zwischen den durch das Particle-Filter kalibrierten Ankerpositionen und den mithilfe des ArUco-Trackings bestimmten Ground Truth Positionen. Im Mittel weichen die geschätzten Ankerpositionen um 13,0 cm vom Ground Truth ab, bei einer Standardabweichung von 5,2 cm. Diese Werte liegen in derselben Größenordnung wie die zuvor beobachteten Fehler bei der Positionsbestimmung des UWB-Tags und bestätigen damit eine konsistente Funktionsweise des Particle-Filters bzw. der automatischen Ankerkalibrierung.

Die bisherige Auswertung basiert lediglich auf den Ergebnissen eines typischen, aber einzelnen Particle-Filter Durchlaufs. Um die statistische Aussagekraft zu erhöhen, wurde das vorgestellte Verfahren zusätzlich 100 Mal auf die aufgezeichneten Messdaten angewendet.

Tabelle 5.1: Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.1. Die Werte geben die mittleren Abweichungen nach Initialisierung des Particle-Filters in cm an.

UWB-Anker	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	\bar{A}	σ_A
Abweichung [cm]	7,8	10,9	17,7	12,2	5,0	12,1	15,7	22,5	13,0	5,2

Dadurch lässt sich überprüfen, ob sich Konvergenzgeschwindigkeit und Schätzgenauigkeit des Particle-Filters über mehrere Durchläufe hinweg in einem vergleichbaren Bereich bewegen. Die Ergebnisse dieser wiederholten Simulationen sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Jeder der 100 Simulationsdurchläufe ist als blauer Datenpunkt im Streudiagramm eingezeichnet. Auf der x-Achse ist die zur Initialisierung benötigte Zeit aufgetragen, auf der y-Achse der entsprechende Wert der Fehlermetrik des Particle-Filters nach Erreichen der Konvergenz. Die roten Fehlerbalken visualisieren zusätzlich den durchschnittlichen Fehlerwert und die Standardabweichung für Gruppen mit ähnlichen Konvergenzzeiten.

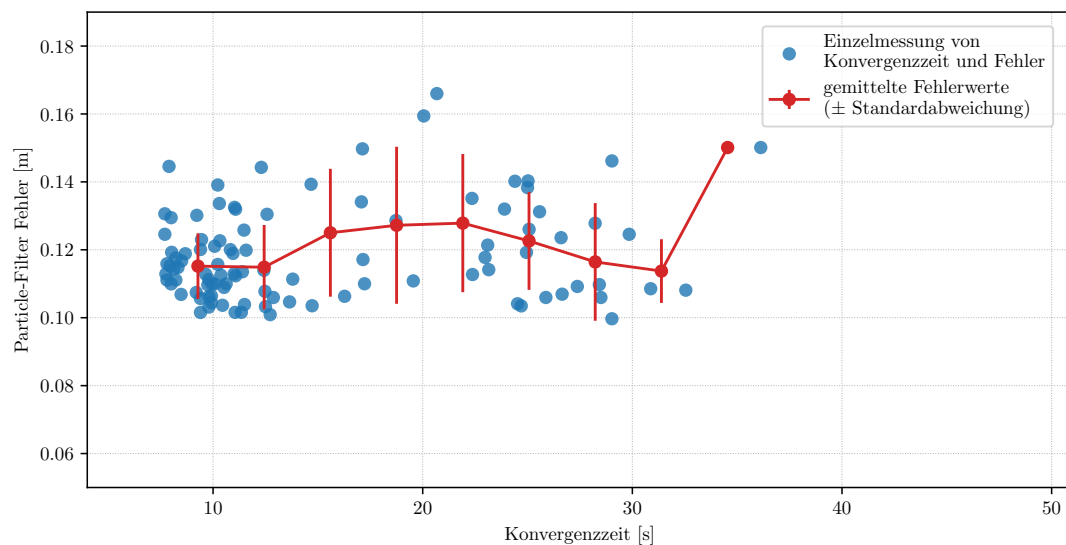


Abbildung 5.10: Zusammenhang zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Fehler des Particle-Filters über 100 Simulationsdurchläufe im Experiment 5.2.1. Insgesamt 40 % der Simulationsdurchläufe konvergieren im Zeitintervall von 7,7 s bis 10,9 s mit einem durchschnittlichen Fehler von rund 11,5 cm.

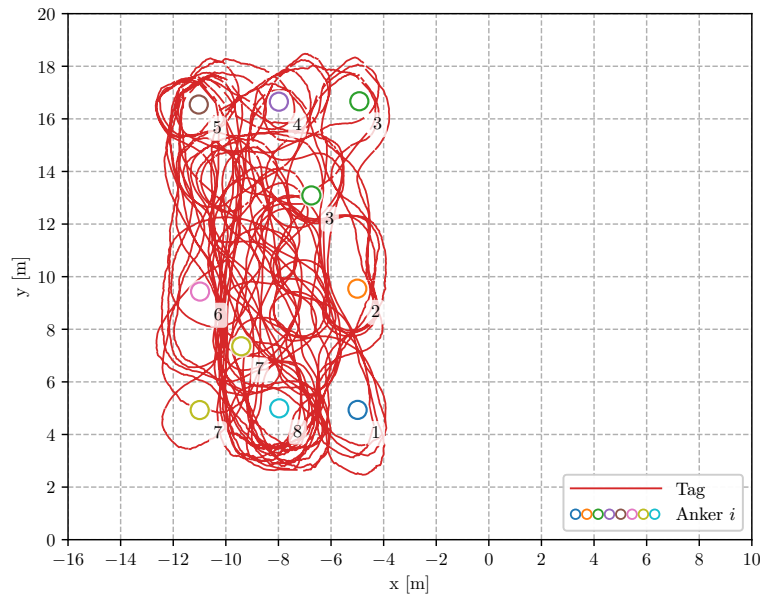
Bildquelle: Eigene Darstellung.

In der Darstellung ist zu erkennen, dass in 40 % der Fälle die Initialisierung bereits nach durchschnittlich 9,3 s abgeschlossen ist. Der dabei erzielte mittlere Positionsfehler beträgt 11,5 cm, mit einer Standardabweichung von 1,0 cm. Die schnellste Konvergenz erfolgt nach 7,7 s mit einem zugehörigen Fehler von 12,5 cm, während der langsamste Durchlauf erst nach 36,1 s konvergiert und einen Fehler von 15 cm aufweist. Bei genauerer Betrachtung lässt sich eine Korrelation zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und erreichter Genauigkeit feststellen. Je schneller die Ankerkalibrierung zu einer stabilen Lösung konvergiert, desto geringer fällt in der Regel der verbleibende Positionsfehler aus. Dieses Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass eine schnelle Konvergenz typischerweise auf eine günstige anfängliche Verteilung der Parameter im Suchraum hinweist. Dadurch kann der nicht-probabilistische Optimierungsalgorithmus während der Initialisierungsphase in kurzer Zeit eine geeignete Schätzung der Ankerpositionen finden. Eine langsamere Konvergenz deutet hingegen darauf hin, dass die Anfangsparameter ungünstig gewählt wurden. Zudem besteht die Gefahr, dass der Optimierungsalgorithmus in einem lokalen Minimum stagniert und somit nur eine suboptimale Schätzung der Ankerpositionen liefert [39].

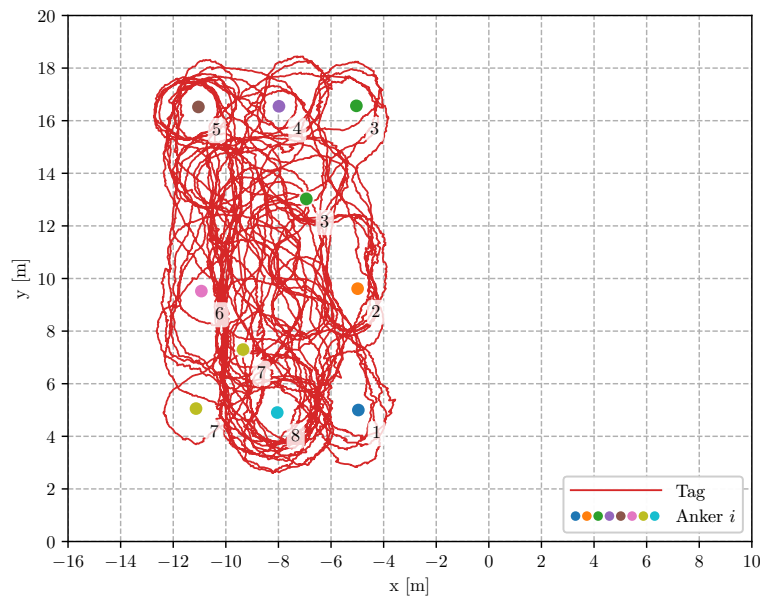
Zusammenfassend lässt sich beurteilen, dass die durchschnittlich erzielte Genauigkeit des vorgeschlagenen Ansatzes zur automatischen Ankerkalibrierung sowohl für die Positionsbestimmung des UWB-Tags als auch für die ermittelten Ankerpositionen bei knapp über ± 10 cm liegt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die als Ground Truth herangezogenen ArUco-Daten selbst Messunsicherheiten aufweisen, etwa durch Verzerrungen infolge der Weitwinkeloptik der Kamera oder durch weitere Einflussfaktoren, wie eine evtl. nicht vollständige zeitliche Synchronität zwischen den ArUco- und UWB-Messungen. Unter idealen Bedingungen ist daher von einer noch etwas höheren Genauigkeit des UWB-Positionierungssystems bzw. der durch das Particle-Filter bestimmten Positionen auszugehen, die näher an der internen Fehlermetrik e_t des Particle-Filters liegt.

5.2.2 Auswirkungen von späteren Änderungen der Ankerpositionen

Eine zentrale Fragestellung im Kontext der automatischen Ankerkalibrierung ist, wie robust der entwickelte Ansatz auf Änderungen der Ankerpositionen nach der Initialisierung reagiert. Zu diesem Zweck wurde das Experiment 5.2.1 in leicht abgewandelter Form erneut durchgeführt, wobei im Verlauf des Versuchs gezielt zwei Ankerpositionen nacheinander verändert wurden. Die betroffenen UWB-Anker A_3 und A_7 wurden jeweils



(a) Messungen der Tag- und Ankerpositionen durch das ArUco-Tracking.



(b) Schätzungen der Tag- und Ankerpositionen durch das Particle-Filter.

Abbildung 5.11: Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Experiment 5.2.2. Dargestellt ist ein Vergleich zwischen den Ground Truth ArUco-Messungen (a) und der Schätzung durch das Particle-Filter (b).

Bildquelle: Eigene Darstellung.

manuell verschoben. Diese Änderungen sind in der Übersicht des Versuchsaufbaus in Abbildung 5.11 anhand der doppelt markierten Ankerpositionen ersichtlich.

Zu Beginn startet das Experiment mit dem bereits bekannten Aufbau der UWB-Anker in rechteckiger Anordnung. Nach $t \approx 275$ s wird der UWB-Anker A_7 um etwa 2,9 m weiter in Richtung Mitte des Testbereichs bewegt. Diese Veränderung ist in Abbildung 5.13b dargestellt. Die Abbildung zeigt den Zustand, in dem die aktualisierte Platzierung der Ankerposition bereits erkannt wurde, aber noch keine neue Kalibrierung erfolgt ist. Der Algorithmus erkennt die Verschiebung anhand eines Anstiegs der Fehlermetrik e_t über den definierten oberen Schwellenwert von ($e_t > 0,3$ m) und startet daraufhin eine weitere Initialisierung. Nach ca. 10 s konvergiert das Particle-Filter erneut, wobei die verschobene Ankerposition erfolgreich korrigiert wird (s. Abbildung 5.14b). Zum Zeitpunkt $t \approx 475$ s wird ein analoger Vorgang mit dem Anker A_3 durchgeführt.

Das Verschieben der Ankerpositionen lässt sich außerdem durch den zeitlichen Verlauf der Fehlermetrik des Particle-Filters in Abbildung 5.12 nachvollziehen. Zu den Zeitpunkten $t \approx 275$ s und $t \approx 475$ s ist jeweils ein deutlicher Anstieg des Fehlers zu erkennen, der unmittelbar nach der neuen Platzierung eines Ankers auftritt und den Start des Initialisierungsprozesses auslöst. Im Durchschnitt erreicht der Algorithmus 11,7 s nach der jeweiligen Veränderung wieder einen konvergenten Zustand.

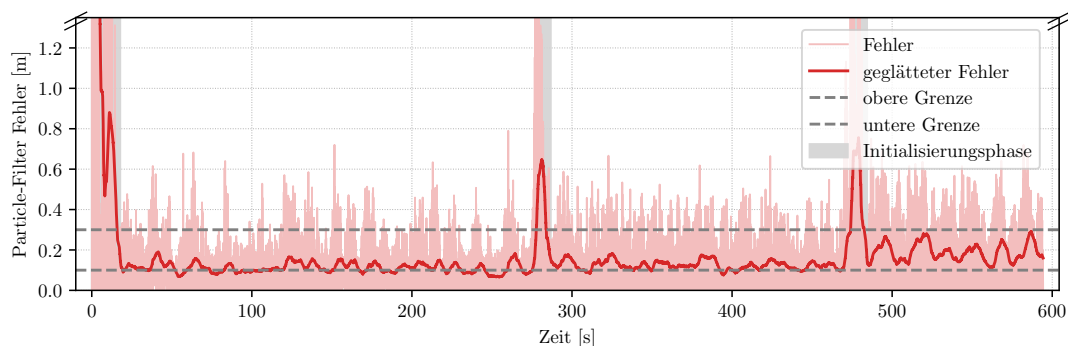
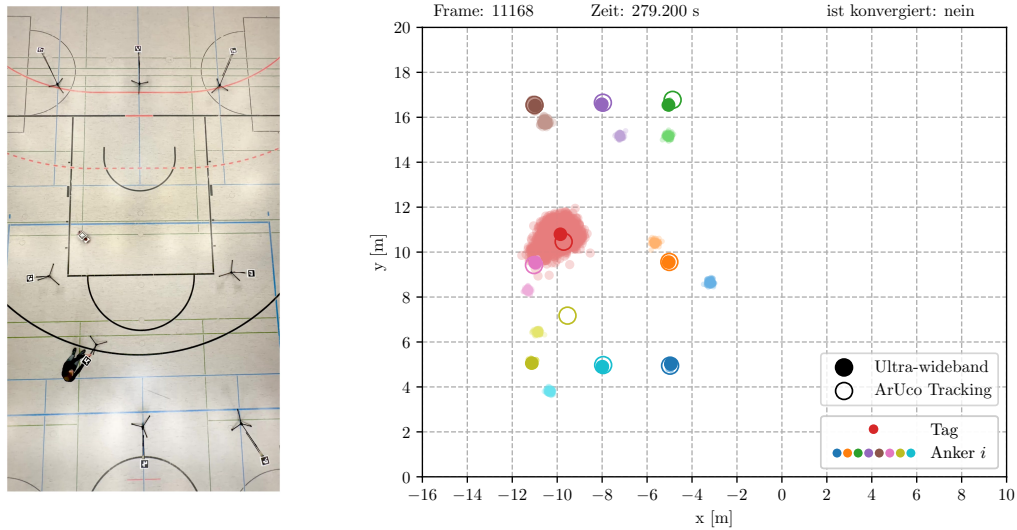


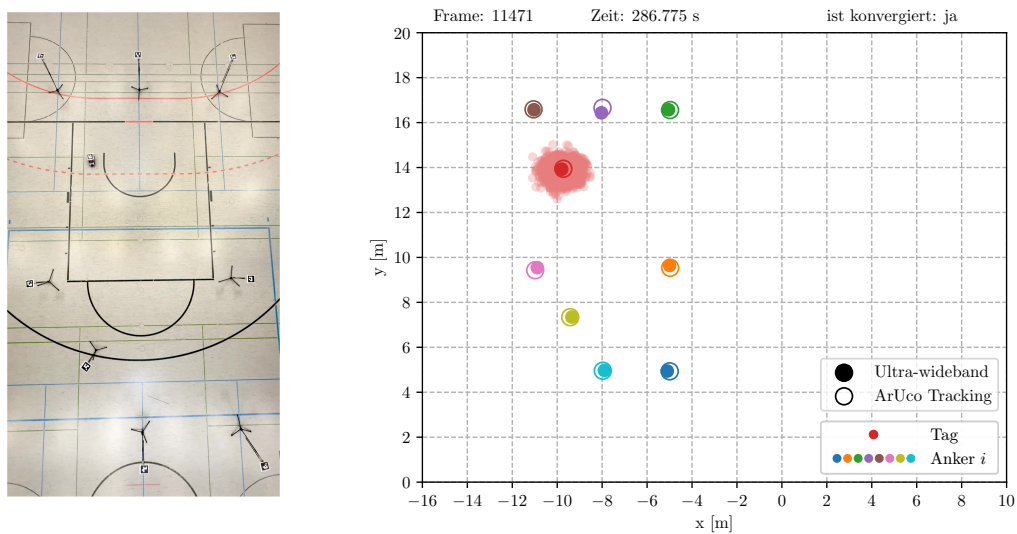
Abbildung 5.12: Zeitlicher Verlauf der internen Fehlermetrik e_t des Particle-Filters im Experiment 5.2.2. An den Zeitpunkten $t \approx 275$ s und $t \approx 475$ s ist jeweils ein sprunghafter Anstieg der Fehlermetrik erkennbar, der durch das manuelle Verschieben eines Ankers ausgelöst wurde. Kurz darauf setzt der Initialisierungsprozess erneut ein. Im Mittel dauert es 11,7 s, bis das Filter erneut konvergiert.

Bildquelle: Eigene Darstellung.



(a) Overhead-Aufnahme. (b) Tag- und Ankerpositionen aus UWB- und ArUco-Messungen.

Abbildung 5.13: Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands nach der Manipulation einer Ankerposition im Experiment 5.2.2.



(a) Overhead-Aufnahme. (b) Tag- und Ankerpositionen aus UWB- und ArUco-Messungen.

Abbildung 5.14: Darstellung des geschätzten und gemessenen Systemzustands nach neuer Kalibrierung der Ankerpositionen im Experiment 5.2.2.

Bildquellen: Eigene Darstellungen.

Auffällig ist, dass der Fehlerverlauf nach der zweiten Ankerveränderung insgesamt höhere Werte bzw. größere Schwankungen aufweist als zuvor. Dies könnte darauf hindeuten, dass die neue Kalibrierung zu früh abgeschlossen wurde, bevor der UWB-Tag ausreichend viele unterschiedliche Positionen im Testgebiet explorieren konnte. Infolgedessen basiert die Schätzung der Ankerpositionen auf unzureichender räumlicher Information, was nachträglich in unbekannten Bereichen zu erhöhten Fehlern führt. Allerdings ist dieses Verhalten nicht kritisch. Sollte e_t erneut den oberen Grenzwert überschreiten, wird eine weitere Initialisierungsphase ausgelöst, die es dem System ermöglicht, eine verbesserte Lösung bzw. eine genauere Ankerkalibrierung zu finden und so die Positionierungsgenauigkeit wieder zu erhöhen.

Insgesamt liegt die mittlere Genauigkeit der Positionsbestimmung des UWB-Tags im Vergleich zum Ground Truth in diesem Versuch bei 14,6 cm mit einer Standardabweichung von 9,4 cm. Der Streukreisradius beträgt 16,6 cm. Dabei wurden ausschließlich die Daten berücksichtigt, bei denen das System erfolgreich initialisiert war. Die Ankerpositionen konnten gemäß Tabelle 5.2 mit einer durchschnittlichen Abweichung von 13,3 cm bestimmt werden.

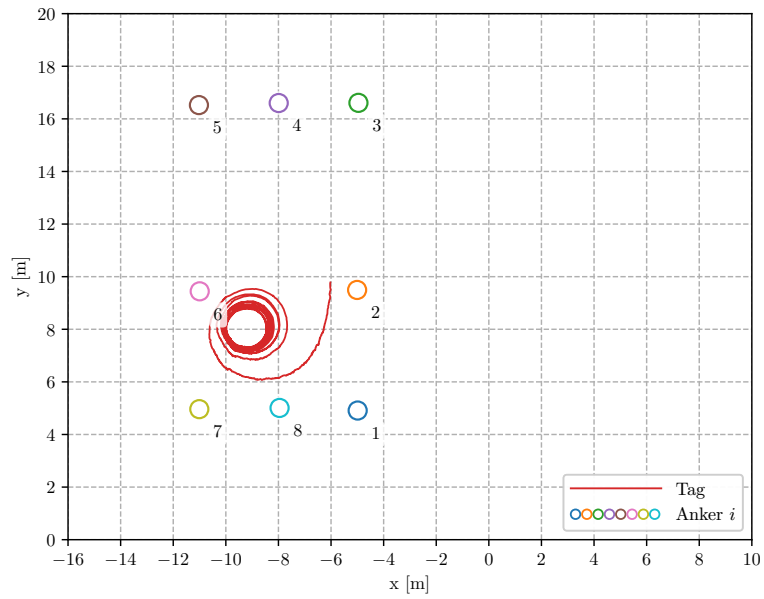
Tabelle 5.2: Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.2. Die Werte geben die mittleren Abweichungen nach Initialisierung des Particle-Filters in cm an.

UWB-Anker	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	\bar{A}	σ_A
Abweichung [cm]	11,3	10,3	18,4	15,6	9,2	12,3	14,9	14,3	13,3	2,9

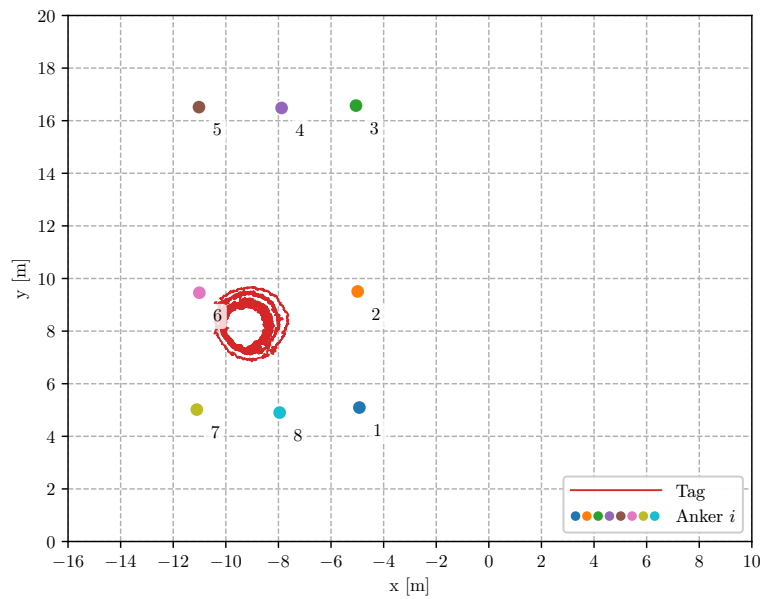
Der Versuch bestätigt, dass das vorgestellte Verfahren in der Lage ist, Veränderungen der Ankerpositionen zuverlässig zu erkennen und unmittelbar eine erneute Kalibrierung durchzuführen. Diese Eigenschaft macht die Methode robust und geeignet für den Einsatz in dynamischen Umgebungen, in denen sich die Positionen einzelner Anker z. B. durch äußere Einflüsse oder gezieltes Umplatzen während des Betriebs verändern können.

5.2.3 Einfluss der Trajektorie auf die Konvergenzgeschwindigkeit

Damit der vorgestellte Ansatz die Positionen der Anker sicher bestimmen kann, ist es erforderlich, dass der UWB-Tag die Umgebung aktiv exploriert und Entfernungsmessungen aus möglichst vielen unterschiedlichen Positionen innerhalb des Testgebiets vorliegen.



(a) Messungen der Tag- und Ankerpositionen durch das ArUco-Tracking.



(b) Schätzungen der Tag- und Ankerpositionen durch das Particle-Filter.

Abbildung 5.15: Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Experiment 5.2.3. Dargestellt ist ein Vergleich zwischen den Ground Truth ArUco-Messungen (a) und der Schätzung durch das Particle-Filter (b).

Bildquelle: Eigene Darstellung.

Vor diesem Hintergrund ist es interessant zu analysieren, welchen Einfluss die gewählte Trajektorie des Tags auf die Konvergenzgeschwindigkeit der Ankerkalibrierung hat.

Zur Untersuchung wurde ein weiteres Experiment durchgeführt, bei dem die Anordnung der Anker ebenfalls der rechteckigen Konfiguration aus Experiment 5.2.1 entspricht. Während im ursprünglichen Experiment jedoch mit dem ferngesteuerten Fahrzeug eine bewusst möglichst zufällige Trajektorie abgefahren wurde, um alle Bereiche des Testfelds gleichmäßig abzudecken, wird in diesem Versuch der *LEGO® MINDSTORMS®* Roboter eingesetzt. Der Roboter bewegt den UWB-Tag auf einer konstanten, kreisförmigen Bahn. Die resultierende Trajektorie weist somit eine deutlich geringere räumliche Variation auf. Eine Übersicht über die Ankerkonfiguration sowie die kreisförmige Trajektorie ist in Abbildung 5.15 dargestellt.

Die in Abbildung 5.15a sichtbare Anfahrbewegung ist in Abbildung 5.15b nicht enthalten, da das Particle-Filter zu diesem Zeitpunkt noch nicht initialisiert ist und folglich keine valide Trajektorie bestimmt werden kann.

Der abgebildete exemplarische Versuchsdurchlauf konvergiert nach 36,8 s. Die mittlere Abweichung der Position des UWB-Tags zum Ground Truth beträgt 10,0 cm bei einer Standardabweichung von 4,3 cm. Der Streukreisradius hat eine Größe von 13,3 cm. Entsprechend der Tabelle 5.3 konnten die Ankerpositionen mit einer mittleren Abweichung von 9,7 cm kalibriert werden.

Tabelle 5.3: Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.3. Die Werte geben die mittleren Abweichungen nach Initialisierung des Particle-Filters in cm an.

UWB-Anker	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	\bar{A}	σ_A
Abweichung [cm]	19,6	3,0	10,6	16,3	3,4	3,3	11,2	10,5	9,7	5,8

Um eine aussagekräftigere Auswertung zu ermöglichen, wurde das Particle-Filter erneut 100 Mal auf die aufgezeichneten Messdaten dieses Versuchs angewendet. Die Abbildung 5.16 enthält die bereits bekannte Darstellung des Zusammenhangs zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und der internen Fehlermetrik des Filters.

Im Gegensatz zu den Beobachtungen aus Experiment 5.2.1 zeigt sich in diesem Versuch, dass eine schnelle Konvergenz nicht zwangsläufig mit einer geringeren Fehlermetrik des Particle-Filters einhergeht. Die besten Genauigkeiten von bis zu 7,6 cm werden hier bei

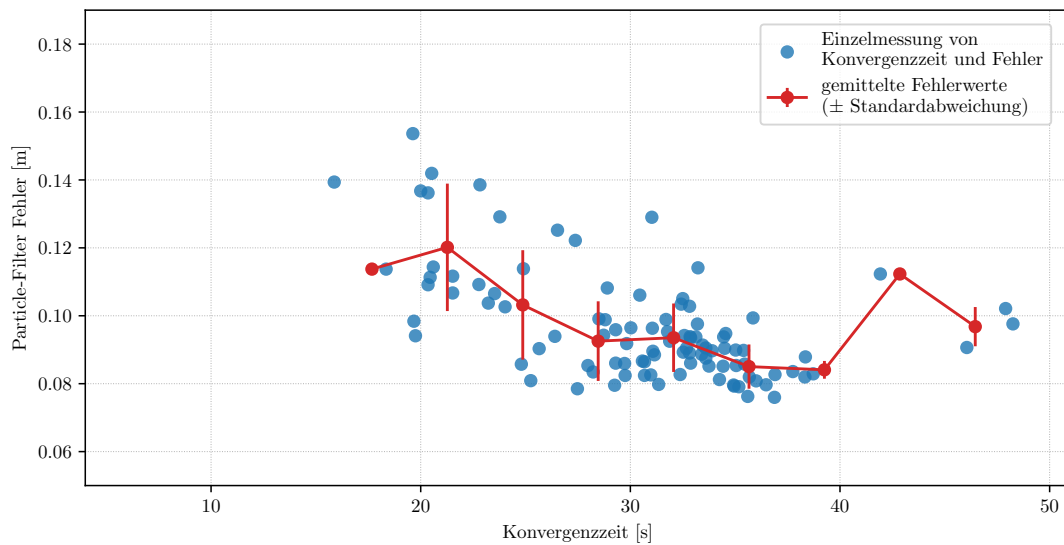


Abbildung 5.16: Zusammenhang zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Fehler des Particle-Filters über 100 Simulationsdurchläufe im Experiment 5.2.3. Über alle Durchläufe hinweg beträgt die durchschnittliche Konvergenzzeit etwa 30,6 s, während die mittlere Fehlermetrik bei ca. 9,7 cm liegt.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

einer durchschnittlichen Konvergenzzeit von etwa 28,5 s erreicht. Damit ist die Konvergenzzeit im Mittel mehr als dreimal so lang wie im vorangegangenen Experiment 5.2.1 mit zufälliger Trajektorie. Gleichzeitig fällt jedoch die Fehlermetrik in diesem Versuch um über 15 % geringer aus. Unklar bleibt allerdings, ob mit dieser Kalibrierung auch dann ähnlich niedrige Fehler erzielt werden, wenn sich der UWB-Tag außerhalb der kreisförmigen Trajektorie, in bisher nicht berücksichtigten Bereichen, bewegt.

Die Ergebnisse unterstützen die Hypothese, dass die Konvergenzgeschwindigkeit und Genauigkeit der Ankerkalibrierung direkt damit zusammenhängt, wie effektiv der UWB-Tag die Umgebung exploriert. Durch die ausschließlich kreisförmige Bewegung liegen während der Initialisierungsphase weniger vielfältige Messdaten aus unterschiedlichen Bereichen des Testfelds vor. Eine zu geringe Exploration führt dazu, dass der Optimierungsalgorithmus nur auf einer begrenzten Menge an Messdaten arbeitet und den Suchraum nicht vollständig abdecken kann, was die Konvergenzzeit verlängert. Konvergiert der Optimierungsalgorithmus hingegen frühzeitig, kann dies bedeuten, dass eine vermeintlich stabile Lösung gefunden wurde, obwohl noch nicht genügend Informationen für eine allgemein

gültige Schätzung vorliegen. Die resultierende Ankerkonfiguration ist in diesem Fall nur lokal konsistent und kann für Tagpositionen außerhalb der bekannten Trajektorie zu größeren Abweichungen führen. Für eine robuste Kalibrierung der Ankerpositionen und eine zuverlässige Positionsbestimmung ist daher eine möglichst breite und gleichmäßige Exploration des Testfelds durch den UWB-Tag von Bedeutung.

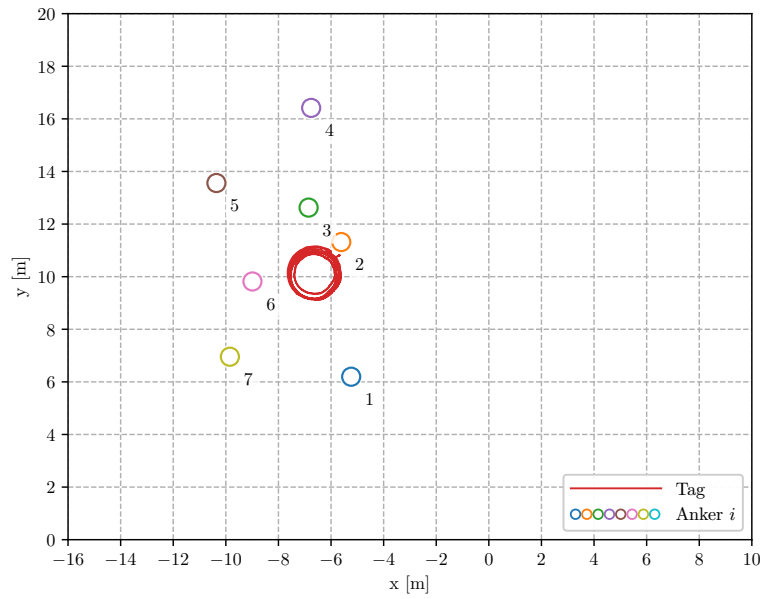
5.2.4 Einfluss der Ankerpositionen auf die Konvergenzgeschwindigkeit

Neben dem Einfluss der Trajektorie auf die Konvergenzgeschwindigkeit und die Genauigkeit der Positionsschätzung stellt sich ebenfalls die Frage, inwiefern die räumliche Anordnung der Anker diese Eigenschaften beeinflusst.

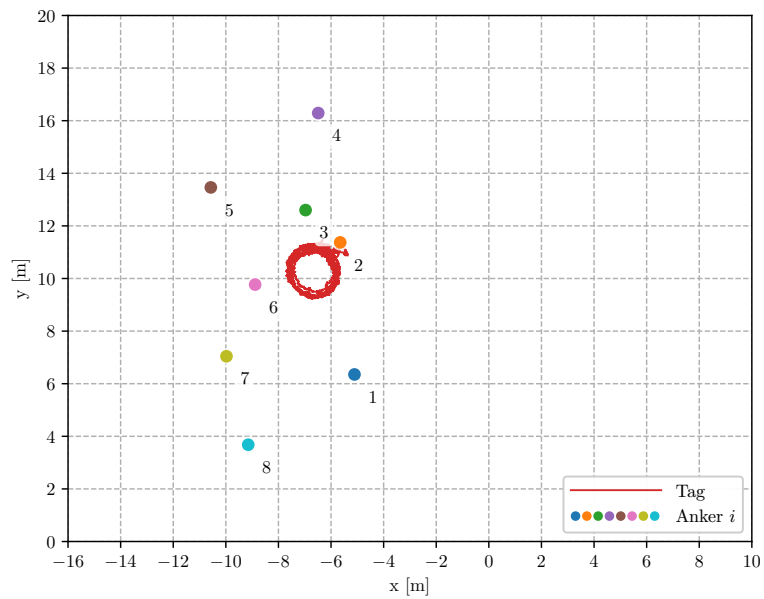
Dieser Aspekt wurde in einem weiteren Experiment untersucht, bei dem erneut der *LEGO® MINDSTORMS®* Roboter zum Einsatz kommt, der den UWB-Tag auf einem konstanten, kreisförmigen Pfad bewegt. Im Unterschied zu den vorangegangenen Versuchen wurde jedoch die räumliche Verteilung der Anker verändert. Die rechteckige Konfiguration aus den vorherigen Experimenten wird potenziell als besonders herausfordernd eingestuft, da sie mehrere Symmetrie- und Spiegelachsen aufweist. Diese könnten dazu führen, dass das Particle-Filter mehr Zeit benötigt, um zwischen äquivalenten Konfigurationen zu unterscheiden, und somit eine längere oder gezieltere Exploration erforderlich wird. Zur Überprüfung dieser Vermutung wurde für das aktuelle Experiment eine weniger symmetrische, stärker verteilte Anordnung der Anker gewählt. Der vollständige Versuchsaufbau mit der Trajektorie des UWB-Tags ist in Abbildung 5.17 dargestellt.

In Abbildung 5.17a fehlt der Anker A_8 , da der entsprechende ArUco-Marker in diesem Experiment außerhalb des Sichtfelds der Kamera lag. Aus diesem Grund ist für diesen Anker keine Ground Truth Position verfügbar. Die Position von A_8 kann dennoch anhand der Schätzung des Particle-Filters in Abbildung 5.17b nachvollzogen werden.

Für den exemplarisch gezeigten Versuchsdurchlauf ergibt sich nach einer Konvergenzzeit von 16,8 s eine mittlere Abweichung der geschätzten Tagpositionen gegenüber dem Ground Truth von 12,6 cm bei einer Standardabweichung von 4,8 cm. Die Größe des Streukreisradius ist 17,0 cm. Wie Tabelle 5.4 zu entnehmen ist, liegt die mittlere Abweichung der geschätzten Ankerpositionen bei 17,1 cm und fällt damit im Vergleich zu den vorherigen Experimenten überraschend höher aus. Auch die Standardabweichung σ_A ist um rund 50 % größer, was auf eine ungleichmäßige Verteilung der Ankerfehler hindeutet. Insbesondere die Anker A_1 , A_4 und A_5 weichen deutlich vom Ground Truth ab. Da sich



(a) Messungen der Tag- und Ankerpositionen durch das ArUco-Tracking.



(b) Schätzungen der Tag- und Ankerpositionen durch das Particle-Filter.

Abbildung 5.17: Übersicht über die Ankerkonfiguration und Positionsmessungen im Experiment 5.2.4. Dargestellt ist ein Vergleich zwischen den Ground Truth ArUco-Messungen (a) und der Schätzung durch das Particle-Filter (b).

Bildquelle: Eigene Darstellung.

die erhöhten Abweichungen der Ankerpositionen nicht merklich auf die Genauigkeit der Positionsbestimmung des UWB-Tags auswirken, ist anzunehmen, dass die relative Geometrie zwischen den Ankern trotzdem konsistent abgebildet ist. Möglich ist auch, dass die Ground Truth Daten der betreffenden Anker fehlerhaft sind, oder dass sich systematische Fehler in den Standorten einzelner Anker gegenseitig kompensieren.

Tabelle 5.4: Abweichungen der kalibrierten Ankerpositionen A_i von den Ground Truth Positionen in Experiment 5.2.4. Die Werte geben die mittleren Abweichungen nach Initialisierung des Particle-Filters in cm an.

UWB-Anker	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	\bar{A}	σ_A
Abweichung [cm]	20,1	7,0	11,8	30,0	23,5	11,5	15,5	N/A	17,1	7,4

Zur besseren Vergleichbarkeit dieser Konfiguration wurde das Particle-Filter erneut 100 Mal mit den gespeicherten Versuchsdaten ausgeführt. Die resultierenden Fehlerwerte und Konvergenzzeiten sind in bekannter Form in Abbildung 5.18 präsentiert.

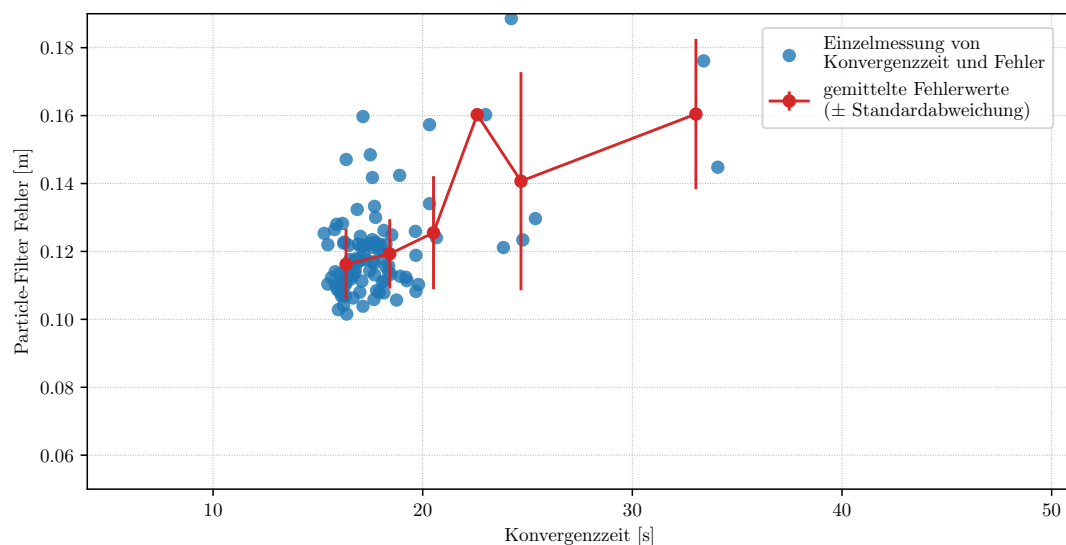


Abbildung 5.18: Zusammenhang zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Fehler des Particle-Filters über 100 Simulationsdurchläufe im Experiment 5.2.4. Innerhalb der ersten 17,4s werden 50 Simulationsdurchläufe initialisiert. Der durchschnittliche Fehler beträgt 12,0 cm mit einer Standardabweichung von 1,5 cm.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

Die mittlere Konvergenzzeit aller 100 Simulationsdurchläufe liegt bei etwa 18,0 s, während die mittlere Fehlermetrik nach der Initialisierung 12,0 cm beträgt. Gegenüber dem vorherigen Experiment 5.2.3, das eine rechteckige Ankeranordnung verwendet, wird die Initialisierungsphase mit der vergleichbaren kreisförmigen Trajektorie knapp 40 % schneller abgeschlossen.

Durch die Ergebnisse wird die eingangs formulierte Hypothese bestätigt, dass die rechteckige Anordnung aufgrund ihrer Symmetrieachsen eine erhöhte Mehrdeutigkeit bei der Kalibrierung der Ankerpositionen aufweist. Diese Symmetrie erschwert die eindeutige Bestimmung der Ankerpositionen während der Initialisierung und verlangsamt somit die Konvergenz. Im Gegensatz dazu reduziert die hier verwendete, asymmetrisch verteilte Ankerkonfiguration den Einfluss solcher Mehrdeutigkeiten und ermöglicht eine insgesamt schnellere Schätzung der Tag- und Ankerpositionen.

Allerdings stellt sich verglichen mit der unregelmäßigen Trajektorie aus Experiment 5.2.1 heraus, dass eine ausführlichere räumliche Exploration des Messgebiets einen noch stärkeren Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit hat als die Ankeranordnung. Trotz der symmetrischen Konfiguration kann durch die komplexere Bewegung des UWB-Tags eine im Mittel um knapp 10 s schnellere Initialisierung erreicht werden als im aktuellen Experiment.

Eine Optimierung der Ankerpositionen kann dennoch zur Verbesserung der Genauigkeit beitragen. Die geometrische Anordnung der UWB-Anker steht in direktem Zusammenhang mit der erreichbaren Positionierungsgenauigkeit, was durch die Dilution of Precision (DOP) [26] beschrieben wird. Diese Metrik wird ursprünglich in der globalen Satellitennavigation eingesetzt, um den Einfluss der Satellitenkonstellation auf die Positionsbestimmung zu bewerten. Ein analoges Verhalten tritt auch in UWB-Positionierungssystemen auf und wurde in diesem Zusammenhang unter anderem von Wang et al. (2020) [38] experimentell untersucht.

5.2.5 Optimierung der Initialisierung mithilfe der Fisher-Information

Wie insbesondere die Experimente 5.2.3 und 5.2.4 zeigen, hängt die Qualität der Ankerkalibrierung maßgeblich davon ab, wie der UWB-Tag die Umgebung exploriert. Einerseits ist eine räumlich möglichst gleichmäßige Verteilung der gemessenen Distanzen vorteilhaft, um eine gute Variation der Beobachtungen zu erzielen. Andererseits können

gezielte Messungen in bestimmten Bereichen dazu beitragen, Mehrdeutigkeiten, z. B. durch symmetrische Ankeranordnungen, aufzulösen.

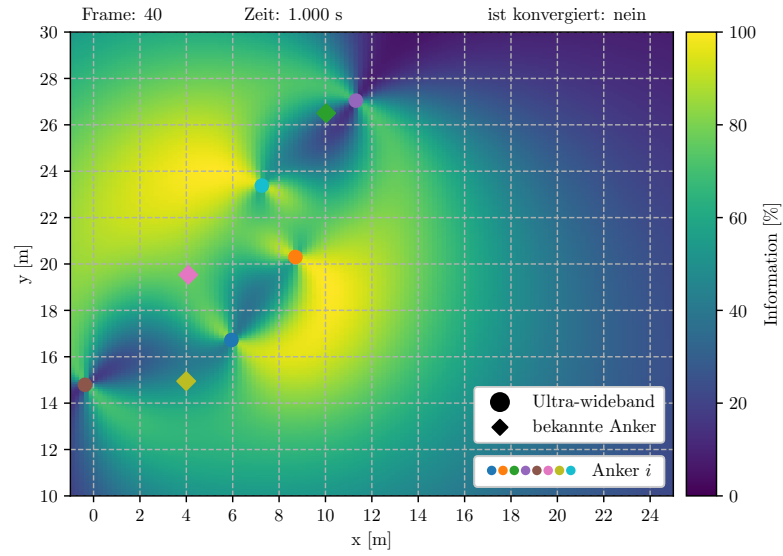
Durch die in Abschnitt 4.4 entwickelte Verwendung der Fisher-Information lässt sich quantifizieren, wie viel Information über die zu schätzenden Ankerpositionen aus einer bestimmten Position im Raum gewonnen werden kann. Diese Information ermöglicht es, gezielt Regionen anzusteuern, die besonders aufschlussreiche Messdaten liefern und somit den Initialisierungsprozess des Particle-Filters robuster und schneller gestalten.

Für die folgende Untersuchung kommen erneut die Versuchsdaten aus Experiment 5.2.1 zum Einsatz. Die Positionen der Anker A_3 , A_6 und A_7 werden dabei als bekannt angenommen und dienen als Referenz, sodass gemäß dem in Abschnitt 4.3 beschriebenen Verfahren eine Transformation in ein globales Koordinatensystem stattfinden kann. Auf diese Weise lässt sich die räumliche Verteilung der Fisher-Information in einer bekannten Karte visualisieren.

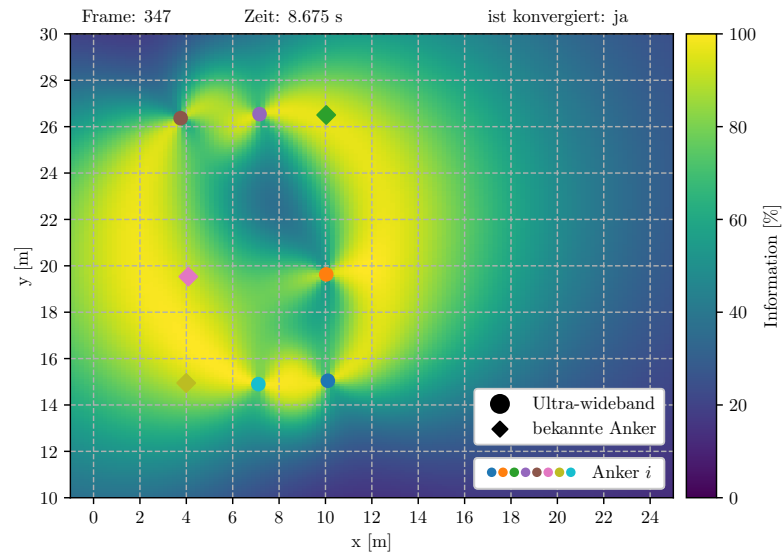
Die Abbildung 5.19 zeigt exemplarisch zwei Falschfarbenkarten, die die relativen Größen der Determinanten der Fisher-Informationsmatrizen für alle möglichen Positionen des UWB-Tags im Messgebiet darstellen. In den Karten sind Regionen mit geringer Informationsdichte blau und besonders informative Bereiche gelb eingefärbt. Die Skala ist in relativen Einheiten angegeben, wobei 100 % dem höchsten Informationswert in der jeweiligen Karte entspricht. Die Karte in Abbildung 5.19a repräsentiert die Verteilung der Fisher-Information während der Initialisierungsphase, wohingegen Abbildung 5.19b den Zustand nach Abschluss der Konvergenz der Ankerkalibrierung veranschaulicht.

Bei der Analyse der Karten ist zu erkennen, dass besonders hohe Informationsgewinne entlang der Achsen zwischen den Ankern auftreten. Erwartungsgemäß ist dies bei der rechteckigen Ankerkonfiguration der Fall, da durch Entfernungsmessungen insbesondere in diesen Bereichen Mehrdeutigkeiten, die aufgrund der symmetrischen Anordnung entstehen, effektiv aufgelöst werden können.

Diese Erkenntnisse erlauben die Entwicklung einer gezielten Explorationsstrategie zur Ankerkalibrierung und Einrichtung des UWB-Positionierungssystems. Ein autonomer Roboter, eine Drohne etc. könnte zunächst die Umgebung nach einem zufälligen Muster explorieren. Anschließend werden die Bereiche mit hoher Fisher-Information identifiziert und erneut angefahren, um diese besonders informativen Zonen effektiv auszunutzen. Dieses Vorgehen könnte die Kalibrierung erheblich beschleunigen und gleichzeitig eine höhere Genauigkeit bei der Bestimmung der Ankerpositionen ermöglichen.



(a) Fisher-Information während der Initialisierungsphase.



(b) Fisher-Information nach Konvergenz der Ankerkalibrierung.

Abbildung 5.19: Farbkodierte Karten zur Darstellung der räumlichen Verteilung der Fisher-Information im Experiment 5.2.5. Besonders informative Bereiche sind gelb markiert, eine geringe Informationsdichte ist blau gefärbt.

Bildquelle: Eigene Darstellung.

6 Fazit

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung und experimentelle Evaluation eines Verfahrens zur automatischen Kalibrierung der Ankerpositionen in einem UWB-Positionierungssystem basierend auf einem probabilistischen Zustandsschätzer. Hierzu wurde ein Particle-Filter entworfen, das simultan die Positionen der ortsfesten Anker und des zu lokalisierenden UWB-Tags schätzt. Das Verfahren reduziert damit den bisher notwendigen manuellen Einmessaufwand deutlich und ermöglicht eine schnelle sowie flexible Inbetriebnahme von UWB-Systemen. Darüber hinaus ist der entwickelte Ansatz robust gegenüber Messunsicherheiten und Initialisierungsfehlern, wodurch eine Anwendung auch in anspruchsvollen, dynamischen Umgebungen möglich ist.

Im theoretischen Teil der Arbeit wurden zunächst die Grundlagen der UWB-Positionsbestimmung sowie probabilistische Verfahren zur Zustandsschätzung erläutert.

Ultra-wideband ist eine vergleichsweise junge Funktechnologie, die sich aufgrund ihrer hohen zeitlichen Auflösung und einer geringen Fehleranfälligkeit besonders für präzise Entfernungs- und Positionsmessungen eignet. Die physikalischen Eigenschaften eines UWB-Signals machen es robust gegenüber Störeinflüssen wie z. B. Mehrwegeeffekten oder Signalreflexionen. Zur Positionsbestimmung werden die Konzepte Time of Arrival, Double-Sided Two-Way Ranging und Trilateration kombiniert, um aus gemessenen Signallaufzeiten bzw. Entfernungen die Position des zu lokalisierenden Knotens zu berechnen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zudem die Hard- und Softwarekomponenten eines eigenen UWB-Beacons entwickelt, das als Grundlage für die experimentelle Evaluation sowie als Plattform für Forschungsprojekte zur Weiterentwicklung der UWB-Positionsbestimmung an der HAW Hamburg dient.

Aufbauend auf dem Satz von Bayes und dem theoretischen Konzept des Bayes-Filters wurde das Particle-Filter als flexibles Werkzeug zur Schätzung nichtlinearer, nicht-Gauß'scher Zustände beschrieben. Darauf aufbauend wurde ein Filterdesign entworfen, das speziell für die Ankerkalibrierung in einem UWB-Positionierungssystem konzipiert ist.

Zentrale Aspekte des Designs umfassten die Initialisierung der Partikelmenge, die Vorhersage und Neugewichtung auf Basis probabilistischer Bewegungs- und Sensormodelle sowie die kongruente Ausrichtung der isometrischen Partikelverteilung, um eine gemeinsame Auswertung der voneinander unabhängig orientierten Partikel zu ermöglichen. Die Initialisierung wird dabei durch einen nicht-probabilistischen Optimierungsalgorithmus unterstützt, der im zunächst unendlich großen Zustandsraum ohne A-priori-Informationen eine erste Schätzung der Ankerpositionen liefert.

Ergänzend wurde eine Metrik zur Bewertung der Messgeometrie mithilfe der Fisher-Informationsmatrix entwickelt, um den Informationsgehalt verschiedener Positionen im Testgebiet in Abhängigkeit von der Ankerkonfiguration zu quantifizieren. Diese Metrik ermöglicht es, während der Initialisierung die Bewegung des UWB-Tags gezielt in Bereiche hoher Informationsdichte zu lenken und so die Konvergenz und Genauigkeit der Ankerkalibrierung zu verbessern.

Die experimentelle Validierung erfolgte in einer Sporthalle anhand mehrerer umfangreicher Experimente. Dabei zeigte sich, dass das entwickelte Verfahren in der Lage ist, die Tag- und Ankerpositionen gegenüber einem Ground Truth mit einer mittleren Abweichung im Bereich von $\pm 10\text{-}15\text{ cm}$ zu bestimmen. Zudem wurde der Einfluss verschiedener Trajektorien und Ankeranordnungen auf die Konvergenzgeschwindigkeit und die Schätzgenauigkeit analysiert. Besonders vorteilhaft für eine präzise und robuste Ankerkalibrierung erwies sich eine gleichmäßige und flächendeckende Exploration des Messfeldes während der Initialisierungsphase. Weiterhin wurde demonstriert, dass das System dynamische Änderungen der Ankerpositionen selbständig erkennt und in unter 12 s eine erneute Kalibrierung durchführt. Diese Eigenschaft ist ein wesentliches Merkmal für den Einsatz in realen, sich verändernden Umgebungen.

Die Ergebnisse zeigen, dass der vorgestellte Ansatz ein leistungsfähiges und vielseitig einsetzbares Verfahren zur Selbstkalibrierung von UWB-Ankern darstellt. Durch die Kombination der probabilistischen Modellierung mit einem klassischen Optimierungsalgorithmus wird eine schnelle und präzise Kalibrierung bei hoher Genauigkeit erreicht. Das entwickelte Verfahren vereinfacht die Einrichtung und den Betrieb von UWB-Positionierungssystemen erheblich und erfüllt damit eines der zentralen Ziele dieser Arbeit. Die erzielte Genauigkeit liegt deutlich unterhalb von 30 cm und entspricht somit den Anforderungen für die meisten Lokalisierungsaufgaben.

Diese Arbeit leistet einen Beitrag zur Forschung an autonomen Lokalisierungssystemen und bildet eine Grundlage für die weitere Entwicklung der UWB-Positionsbestimmung.

6.1 Ausblick

In den bisherigen Versuchen wurde das UWB-Positionierungssystem unter kontrollierten Bedingungen getestet. Dies ermöglichte eine klare Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse und erleichterte evtl. Fehlersuchen. Für weiterführende Untersuchungen stellt sich jedoch die Frage, wie sich das UWB-System sowie das Verfahren zur automatischen Ankerkalibrierung unter komplexeren Bedingungen, etwa in größeren oder unübersichtlicheren Umgebungen, verhalten.

Ein erster naheliegender Schritt besteht in der Erprobung des Systems im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 . Da die grundlegenden theoretischen Überlegungen bereits im zweidimensionalen Raum validiert wurden, sollten nur geringe Anpassungen am Systemdesign erforderlich sein, um auch im Dreidimensionalen eine zuverlässige Ankerkalibrierung und Positionsbestimmung zu ermöglichen. Dazu sind zusätzliche Koordinaten zur Modellierung der dritten Dimension einzuführen und bei der Platzierung der UWB-Anker weitere geometrische Anforderungen zu berücksichtigen.

Für weiterführende Untersuchungen bietet sich zudem die Erprobung des Systems in sogenannten *Multi-Hop*-Umgebungen an, also in großflächigen Einsatzszenarien, bei denen sich nicht alle verfügbaren Anker gleichzeitig in Reichweite des UWB-Tags befinden. Das entwickelte Verfahren sollte auch unter diesen Bedingungen funktionsfähig bleiben. Es ist zu erwarten, dass mehrere Initialisierungsphasen erforderlich sind, insbesondere wenn neue, bislang unbekannte Bereiche betreten werden, die zunächst eine Ankerkalibrierung erfordern.

Darüber hinaus bieten die bereits gewonnenen Erkenntnisse Ansatzpunkte für die Optimierung des Filterdesigns. Insbesondere das Bewegungsmodell könnte weiterentwickelt werden, um auch vielfältigere und nicht gleichförmige Bewegungsmuster zuverlässig abzubilden. Dazu und zur weiteren Verbesserung der Positionsschätzung bietet sich die Integration zusätzlicher Sensoren an. Eine Fusion mit Inertial Measurement Units oder Odometriedaten stärkt den Bezug zu klassischen SLAM-Verfahren und könnte die Genauigkeit sowie die Stabilität der Schätzung weiter erhöhen. Des Weiteren könnten je nach Anwendungsgebiet fortgeschrittene Sensortechnologien wie Radar oder Lidar die Einsatzmöglichkeiten und die Robustheit des Systems erweitern.

Literaturverzeichnis

- [1] ALARIFI, Abdulrahman ; AL-SALMAN, AbdulMalik ; ALSALEH, Mansour ; ALNAFESSAH, Ahmad ; AL-HADHRAMI, Suheer ; AL-AMMAR, Mai A. ; AL-KHALIFA, Hend S.: Ultra Wideband Indoor Positioning Technologies: Analysis and Recent Advances. In: *Sensors* 16 (2016), Nr. 5, S. 707
- [2] ARULKUMARAN, Kai ; DEISENROTH, Marc P. ; BRUNDAGE, Miles ; BHARATH, Anil A.: Deep Reinforcement Learning: A brief survey. In: *IEEE Signal Processing Magazine* 34 (2017), Nr. 6, S. 26–38
- [3] ARUN, K. S. ; HUANG, Thomas S. ; BLOSTEIN, Steven D.: Least-Squares Fitting of Two 3-D Point Sets. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (1987), Nr. 5, S. 698–700
- [4] BUNDESNETZAGENTUR: *Allgemeinzuteilung von Frequenzen für die Nutzung durch Ultrabreitband-Anwendungen (UWB)*. 2025. – URL https://www.bundesnetzagentur.de/SharedDocs/Downloads/DE/Sachgebiete/Telekommunikation/Unternehmen_Institutionen/Frequenzen/Allgemeinzuteilungen/FunkanlagenGeringerReichweite/2025Vfg11_UWB.pdf. – zuletzt abgerufen am 28.09.2025
- [5] CORBALÁN, Pablo ; PICCO, Gian P. ; COORS, Martin ; JAIN, Vivek: Self-Localization of Ultra-Wideband Anchors: From Theory to Practice. In: *IEEE Access* 11 (2023), S. 29711–29725
- [6] CZADO, Claudia ; SCHMIDT, Thorsten: *Mathematische Statistik*. Berlin, Heidelberg, Deutschland : Springer, 2011. – ISBN 978-3-642-17261-8
- [7] DECAWAVE LTD.: *DW3000 FAMILY USER MANUAL*. 2019. – Version 1.1
- [8] DOHERTY, Lance ; PISTER, Kristofer S. J. ; EL GHAOU, Laurent: Convex Position Estimation in Wireless Sensor Networks. In: *IEEE INFOCOM 2001 - The Conference on Computer Communications - Twentieth Annual Joint Conference of*

- the IEEE Computer and communications Societies* Bd. 3 IEEE (Veranst.), 2001, S. 1655–1663
- [9] DÖRN, Sebastian: *Programmieren für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Intelligente Algorithmen und digitale Technologien*. Berlin, Heidelberg, Deutschland : Springer, 2018. – ISBN 978-3-662-54303-0
- [10] ELFRING, Jos ; TORTA, Elena ; MOLENGRAFT, René van de: Particle Filters: A Hands-On Tutorial. In: *Sensors* 21 (2021), Nr. 2, S. 438
- [11] EUROPEAN TELECOMMUNICATIONS STANDARDS INSTITUTE: *Ultra Wide Band*. – URL <https://www.etsi.org/technologies/ultra-wide-band>. – abgerufen am 19.10.2025
- [12] GARRIDO, Sergio ; PANOV, Alexander: *Detection of ArUco Markers*. Oktober 2025. – URL https://docs.opencv.org/4.x/d5/dae/tutorial_aruco_detection.html. – zuletzt abgerufen am 16.10.2025
- [13] GEZICI, Sinan: A Survey on Wireless Position Estimation. In: *Wireless Personal Communications* 44 (2008), Nr. 3, S. 263–282
- [14] HAW HAMBURG ; GÄRTNER, Henner: *SafeWalker*. – URL <https://www.haw-hamburg.de/forschung/forschungsprojekte-detail/project/project/show/safewalker/>. – zuletzt abgerufen am 22.09.2025
- [15] HAW HAMBURG ; PAREIGIS, Stephan: *Ganz klein auf großer Fahrt*. Dezember 2022. – URL <https://www.haw-hamburg.de/detail/news/news/show/ganz-klein-auf-grosser-fahrt/>. – zuletzt abgerufen am 22.09.2025
- [16] HAW HAMBURG ; TIEDEMANN, Tim: *Smart Recycling*. – URL <https://www.haw-hamburg.de/forschung/forschungsprojekte-detail/project/project/show/smart-recycling/>. – zuletzt abgerufen am 22.09.2025
- [17] HERTZBERG, Joachim ; LINGEMANN, Kai ; NÜCHTER, Andreas: *Mobile Roboter: Eine Einführung aus Sicht der Informatik*. Berlin, Heidelberg, Deutschland : Springer, 2012. – ISBN 978-3-642-01725-4
- [18] HOLST, Julian: *Sensordatenfusion zur Navigation eines selbstfahrenden Assistenzsystems für Blinde*, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Masterarbeit, 2022

- [19] INGRAM, S. J. ; HARMER, D. ; QUINLAN, M.: UltraWideBand Indoor Positioning Systems and their Use in Emergencies. In: *PLANS 2004. Position Location and Navigation Symposium* IEEE (Veranst.), 2004, S. 706–715
- [20] KASTEN, Markus: *Hardwareplattformen für autonome Straßenfahrzeuge im Maßstab 1:87*, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Bachelorarbeit, 2021
- [21] KOCH, Sven: *Hochgenaue Positionsbestimmung mit Ultra-wideband und Reinforcement Learning*, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Bachelorarbeit, 2021
- [22] KOCH, Sven: *Präzise Lokalisierung mit Ultra-wideband und globalen Satellitennavigationssystemen in urbanen Gebieten*, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Grundprojekt, 2024
- [23] KOCH, Sven: *Optimierung von Ankerpositionen in Ultra-wideband Positionierungssystemen*, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Hauptprojekt, 2025
- [24] KUNZ, Thomas ; TATHAM, Benjamin: Localization in Wireless Sensor Networks and Anchor Placement. In: *Journal of Sensor and Actuator Networks* 1 (2012), Nr. 1, S. 36–58
- [25] LABBE JR, Roger R.: *Kalman and Bayesian Filters in Python*. <https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python>. 2015
- [26] LANGLEY, Richard B. u. a.: Dilution of Precision. In: *GPS world* 10 (1999), Nr. 5, S. 52–59
- [27] LIU, Jane ; WEST, Mike: Combined Parameter and State Estimation in Simulation-Based Filtering. In: *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. New York, NY, USA : Springer, 2001, S. 197–223
- [28] LYMBEROPOULOS, Dimitrios ; LIU, Jie: The Microsoft Indoor Localization Competition: Experiences and lessons learned. In: *IEEE Signal Processing Magazine* 34 (2017), Nr. 5, S. 125–140
- [29] NAVIDI, William ; MURPHY JR., William S. ; HEREMAN, Willy: Statistical Methods in Surveying by Trilateration. In: *Computational Statistics & Data Analysis* 27 (1998), Nr. 2, S. 209–227

- [30] QI, Mingyang ; XUE, Bing ; WANG, Wei: Calibration and Compensation of Anchor Positions for UWB Indoor Localization. In: *IEEE Sensors Journal* 24 (2023), Nr. 1, S. 689–699
- [31] SAHINOGLU, Zafer ; GEZICI, Sinan ; GÜVENC, Ismail: *Ultra-wideband Positioning Systems: Theoretical Limits, Ranging Algorithms, and Protocols*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2008. – ISBN 978-0-521-87309-3
- [32] SHI, Qin ; ZHAO, Sihao ; CUI, Xiaowei ; LU, Mingquan ; JIA, Mengdi: Anchor Self-Localization Algorithm Based on UWB Ranging and Inertial Measurements. In: *Tsinghua Science and Technology* 24 (2019), Nr. 6, S. 728–737
- [33] SICILIANO, Bruno ; KHATIB, Oussama: *Springer Handbook of Robotics*. Berlin, Heidelberg, Deutschland : Springer, 2008. – ISBN 978-3-540-23957-4
- [34] SIMON, Dan: *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Hoboken, NJ, USA : John Wiley & Sons, 2006. – ISBN 978-0-471-70858-2
- [35] STEIN, Oliver: *Grundzüge der nichtlinearen Optimierung*. Berlin, Heidelberg, Deutschland : Springer, 2018. – ISBN 978-3-662-55592-7
- [36] THRUN, Sebastian ; BURGARD, Wolfram ; FOX, Dieter: *Probabilistic Robotics*. Cambridge, MA, USA : The MIT Press, 2005. – ISBN 978-0-262-20162-9
- [37] UWB ALLIANCE: Applications. (2019). – URL <https://uwballiance.org/applications/>. – zuletzt abgerufen am 28.09.2025
- [38] WANG, Mei ; CHEN, Zhao ; ZHOU, Zou ; FU, Jieli ; QIU, Hongbing: Analysis of the Applicability of Dilution of Precision in the Base Station Configuration Optimization of Ultrawideband Indoor TDOA Positioning System. In: *IEEE Access* 8 (2020), S. 225076–225087
- [39] WENDEBERG, Johannes ; MÜLLER, Jörg ; SCHINDELHAUER, Christian ; BURGARD, Wolfram: Robust Tracking of a Mobile Beacon using Time Differences of Arrival with Simultaneous Calibration of Receiver Positions. In: *2012 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)* IEEE (Veranst.), 2012, S. 1–10
- [40] YASUKAWA, Yukiya ; HIGASHI, Yoshiyuki ; MASUDA, Arata ; MIURA, Nanako: Automatic Anchor Calibration for UWB-based Indoor Positioning Systems. In: *2020 IEEE REGION 10 CONFERENCE (TENCON)* IEEE (Veranst.), 2020, S. 1374–1379

- [41] YAVARI, Mohammadreza ; NICKERSON, Bradford G.: Ultra wideband wireless positioning systems. In: *Dept. Faculty Comput. Sci., Univ. New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, Tech. Rep. TR14-230* (2014)
- [42] ZAFARI, Faheem ; GKELIAS, Athanasios ; LEUNG, Kin K.: A Survey of Indoor Localization Systems and Technologies. In: *IEEE Communications Surveys & Tutorials* 21 (2019), Nr. 3, S. 2568–2599

A Anhang

Verzeichnis- und Dateistruktur der beiliegenden CD:

```
/
├── 2025SvenKoch.pdf ..... Masterarbeit „Automatische Kalibrierung von
                             Ankerpositionen zur hochgenauen Positions-
                             bestimmung mit Ultra-wideband“
├── Experimente/
│   ├── experiment_5-2-1.mp4 ..... Video zu Experiment 5.2.1
│   ├── experiment_5-2-2.mp4 ..... Video zu Experiment 5.2.2
│   ├── experiment_5-2-3.mp4 ..... Video zu Experiment 5.2.3
│   ├── experiment_5-2-4.mp4 ..... Video zu Experiment 5.2.4
│   └── experiment_5-2-5.mp4 ..... Video zu Experiment 5.2.5
```

Glossar

Bandbreite, absolut Die absolute Bandbreite $B_{\text{abs}} = f_{\text{H}} - f_{\text{L}}$ beschreibt die Differenz zwischen der oberen Grenzfrequenz f_{H} und der unteren Grenzfrequenz f_{L} . Ihr Wert wird in der Einheit Hertz (Hz) angegeben und entspricht der tatsächlichen Breite des betrachteten Frequenzbereichs.

Bandbreite, relativ Die relative Bandbreite $B_{\text{frac}} = \frac{B_{\text{abs}}}{f_{\text{c}}}$ setzt die absolute Bandbreite B_{abs} ins Verhältnis zur Mittenfrequenz f_{c} des betrachteten Frequenzbereichs. Die Größe ist dimensionslos (oft in Prozent angegeben) und erlaubt den Vergleich von Bandbreiten unabhängig von der absoluten Frequenzlage.

Brennweite Die Brennweite f ist der Abstand zwischen der Linsenmitte (bzw. dem optischen Zentrum) und der Bildebene, in der ein Objekt im Unendlichen scharf abgebildet wird. Sie bestimmt den Abbildungsmaßstab und das Sichtfeld eines optischen Systems.

Ground Truth Als Ground Truth wird eine Information bezeichnet, die als wahr oder real anzusehen ist. Ein Ground Truth wird in der Regel empirisch durch eine direkte Messung oder Beobachtung ermittelt.

Lidar Lidar (von *Light Detection and Ranging*) ist ein optisches Messverfahren, das auf der Laufzeitmessung von Laserimpulsen basiert. Durch Analyse der reflektierten Lichtsignale können Entfernungs- und 3D-Strukturdaten der Umgebung gewonnen werden.

Mehrwegeeffekt Der Mehrwegeeffekt tritt auf, wenn ein Funksignal auf seinem Weg vom Sender zum Empfänger durch Reflexion, Beugung oder Streuung mehrere Ausbreitungspfade nimmt. Dadurch treffen zeitlich versetzte Signalanteile beim Empfänger ein, was zu Überlagerungen, Verzerrungen oder Laufzeitfehlern führen kann.

Non-Line-of-Sight Non-Line-of-Sight (NLOS) bezeichnet eine Funkübertragung, bei der keine direkte Sichtverbindung zwischen Sender und Empfänger besteht. Das Signal erreicht den Empfänger über Reflexionen, Beugung oder Streuung an Hindernissen, was zu längeren Laufzeiten und damit zu Positionsfehlern in Ortungssystemen führen kann.

Odometrie Odometrie bezeichnet die Positions- und Wegschätzung eines Fahrzeugs oder Roboters anhand des Antriebssystems. Aus den gemessenen Radumdrehungen wird die zurückgelegte Strecke und gegebenenfalls die Änderung der Fahrtrichtung berechnet. Da sich kleine Messfehler über die Zeit aufsummieren, nimmt die Positionsgenauigkeit mit zunehmender Fahrstrecke ab.

optisches Zentrum Das optische Zentrum ist der Punkt im Inneren eines optischen Systems, in dem die Lichtstrahlen eines Objekts zusammenlaufen, bevor sie auf den Bildsensor treffen. Es befindet sich meist in der Mitte der Linse.

Paketumlaufzeit Die Paketumlaufzeit (engl. Round Trip Time (RTT)) bezeichnet die Zeit, die ein Datenpaket benötigt, um von einem Sender zu einem Empfänger übertragen und eine Antwort (z. B. eine Bestätigung) zurückgesendet zu werden.

Radar Radar (von *Radio Detection and Ranging*) ist ein Verfahren zur Objekterkennung und Distanzmessung, bei dem elektromagnetische Wellen ausgesendet und die reflektierten Signale ausgewertet werden. Aus der Laufzeit und Intensität der Echos können Entfernung, Richtung und Bewegung von Objekten bestimmt werden.

Signalabschattung Signalabschattung bezeichnet die Abschwächung eines Funksignals beim Durchgang durch Hindernisse oder aufgrund von Entfernung. Die Abschattung reduziert die Signalstärke am Empfänger und kann die Genauigkeit von Ortungssystemen oder die Reichweite von Kommunikationsverbindungen beeinflussen.

Signalreflexion Eine Signalreflexion tritt auf, wenn ein Funksignal auf ein Hindernis trifft und teilweise oder vollständig zurückgeworfen wird. Reflexionen führen zu zusätzlichen Signalwegen, die die Ausbreitung beeinflussen und insbesondere in Ortungssystemen zu Messfehlern oder Mehrwegeeffekten führen können.

Streukreisradius Der Streukreisradius (engl. Circular Error Probable (CEP)) ist ein Maß für die Genauigkeit von Positionsbestimmungen. Es beschreibt den Radius eines Kreises um die wahre Position, innerhalb dessen ein bestimmter Prozentsatz (meist 50 %) der gemessenen Positionen liegt. Ein kleiner CEP steht für eine hohe Positionierungsgenauigkeit.

Transceiver Ein Transceiver (aus *Transmitter* und *Receiver*) ist ein Gerät, das sowohl Sende- als auch Empfangsfunktionen in einem einzigen Modul vereint.

Urban Canyon Als Urban Canyon wird ein städtischer Raum bezeichnet, der von höheren Gebäuden eingerahmt ist und somit eine schluchtähnliche Umgebung bildet. In solchen Umgebungen wird die Ausbreitung von Funksignalen durch Mehrwegeeffekte, Signalreflexionen und -abschattungen stark beeinträchtigt. Dadurch entstehen besondere Herausforderungen für Ortungssysteme und für die drahtlose Kommunikation.

Verzerrungskoeffizienten Die Verzerrungskoeffizienten beschreiben die Abweichungen einer realen Kamera von einem idealen Lochkameramodell. Die Koeffizienten modellieren vor allem radiale und tangentiale Verzeichnungen, die durch Linsenfehler entstehen, und werden bei der Kamerakalibrierung zur Korrektur dieser Effekte verwendet.

Erklärung zur selbständigen Bearbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Ort

Datum

Unterschrift im Original